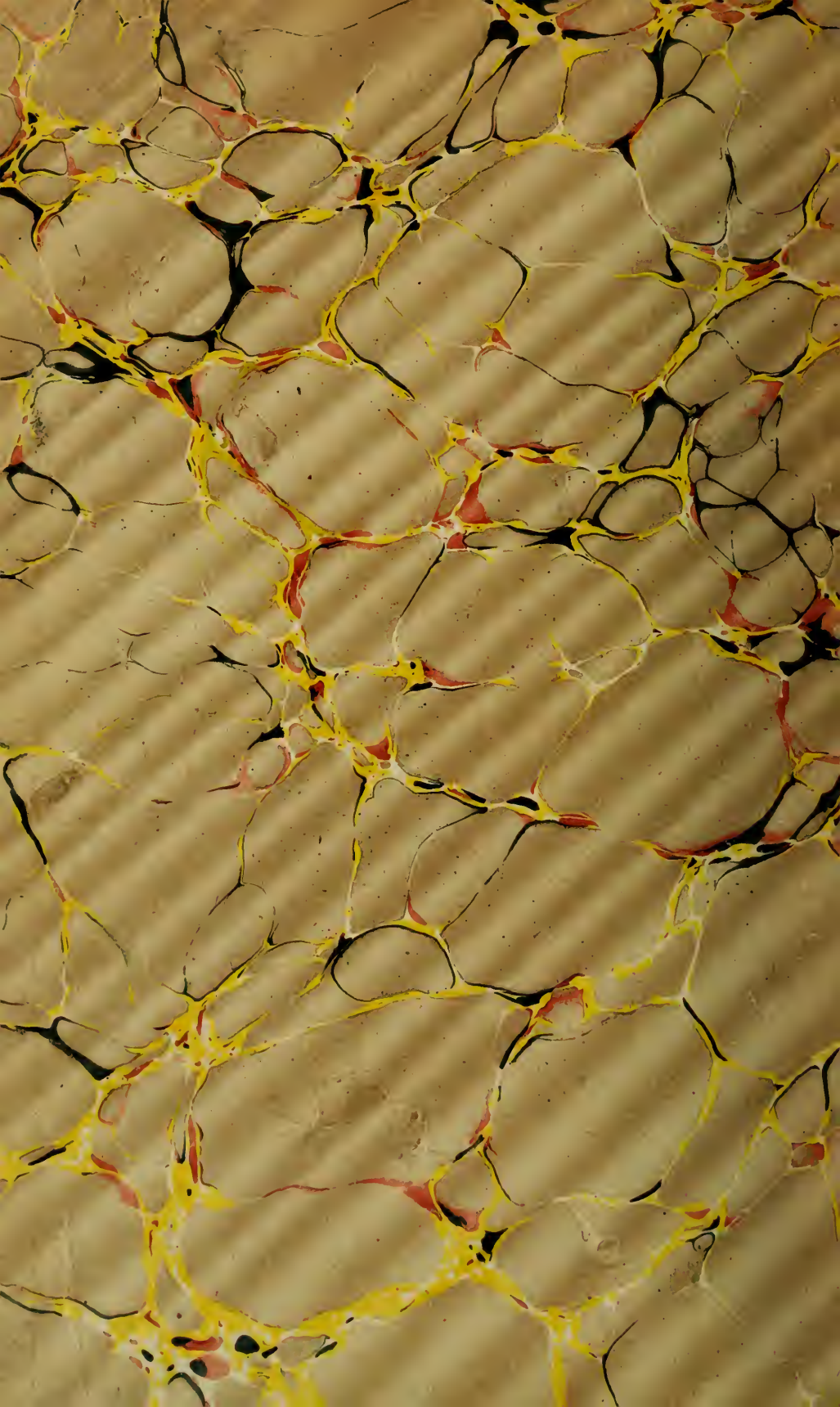




Physical &
Applied Sci.
Senals

*Physical &
Applied Sci.
Serials*

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

18113. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

*Physical &
Applied Sci.
Serials*

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIE

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGTIÈME. — ANNÉE 1892.

180094
415122

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7. RUE DES GRANDS-AUGUSTINS. 7

1892

QA

1

S59

t.20-21

LISTE
DES
PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
DEPUIS SA FONDATION.

MM.

1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1891	COLLIGYON.
1892	VICAIRE.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.

RIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).

BIOCHE, professeur de Mathématiques.

BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.

BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).

BROCARD, chef de bataillon du Génie.

CAVET, ingénieur civil.

CHASLES, membre de l'Institut (décédé).

CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.

FOIRET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.

HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).

HATON DE LA GOUILLIÈRE, membre de l'Institut.

HERMITE, membre de l'Institut.

HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.

JORDAN, membre de l'Institut.

LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).

MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.

DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico.

MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.

PEROTT (Joseph).

PERRIN, ingénieur en chef des Mines.

POINCARÉ, membre de l'Institut.

POLIGNAC (prince C. DE).

RAFFA, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.

SALOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.

TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.

TARRA, contrôleur des Contributions diverses.

TECHÉNICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.

VELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1892 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau . . .	{ MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
------------------------------------	---

Président.	MM. VICAIRE.
Vice-Présidents	{ DE COMBEROUSSE. GOURSAT. HUMBERT. PICQUET.
Secrétaires	{ KOENIGS. RAFFY.
Vice-Secrétaires.	{ CARVALLO. L. LÉVY.
Archiviste.	DE PRESLE.
Trésorier.	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{ ANDRÉ, 1893. APPELL, 1894. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1893. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1894. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1894. POINCARÉ, 1893. ROUCHÉ, 1893.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris.
1887. ALBEGGIANI (M.-L.), professeur à l'Université, Salita Banditore, 4, à Palerme (Italie).
1881. AMIGUES, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. ANTONARI, professeur de Mathématiques, rue Vavin, 5, à Paris.
1879. APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. ARNAUD, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Arles (Bouches-du-Rhône).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. BEGUIN (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
1871. BEYVOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P. (1).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTHAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. BEYENS (Ignacio), major du Génie, Santa Inés, 5, à Cadix (Espagne).
1872. BIENAYMÉ (Arthur), directeur du matériel, au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au Collège Stanislas, rue de Madame, 34, à Paris, S. P.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1890. BIERKNEES, professeur à l'Université, à Christiania (Norvège).
1891. BLUTEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1881. BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. BOULANGER, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algérie).
1886. BRAULT (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 15, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du Génie, à Valence (Drôme), S. P.
1886. BRINEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1888. CAYET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris, S. P.
1885. CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1887. CARYALLO, examinateur à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, Passy-Paris.
1887. CASPARY, professeur au Collège Humboldt, à Berlin (Allemagne).
1873. CATALAN, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Ébrouns, à Liège (Belgique).
1887. CERBUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1873. CIVALE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.

(1) Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
1872. **COLLIGNON**, inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. **COLOT**, au château du Senil, à Cérons (Gironde).
1875. **COMBEROUSSE (DE)**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. **COURCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. **CRAIG (Thomas)**, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. **CREMONA**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. **CRETIN**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. **DARBOIX**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. **DAUTHVILLE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. **DEFFORGES**, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. **DELANNOY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. **DEMARTRES**, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1883. **DERUYTS**, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. **DEWULF**, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Babatau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1882. **DREYFUS (Camille)**, député, quai Voltaire, 3, à Paris.
1886. **DUNCAN**, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. **DURRANDE**, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. **DYCK (Walther)**, professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1881. **ESCARY**, professeur au Lycée, à Constantine (Algérie).
1873. **FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. **FARRY**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. **FAIQUENBERGUE**, professeur au Lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1885. **FERRAZ**, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. **FIELDS (John)**, professeur de Mathématiques, Alleghany College, à Meadville (États-Unis d'Amérique).
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
1891. **FONTVIOLENT (DE)**, répétiteur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. **FOUCHÉ**, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **GEBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de la Voûte, près Mauzanhaac (Cantal).

Date
de
l'admission.

1890. GENTY, enseigne de vaisseau, à bord du *Lutin*, division de Cochinchine, à Saigon.
1889. GEORGIAN.
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GERONO, ancien professeur de Mathématiques, rue d'Alembert, 1, à Paris.
1872. GOFFART, rue Nollet, 57. Paris.
1881. GOURSAT, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. GRANDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1881. GRUEY, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. GUINARIES, officier du Génie, rua de Sacramento à Lapa, 44, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. HAAG, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris, S. P.
1872. HENRY, inspecteur général des Ponts et Chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1875. HIRST, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
1879. HOLST (Eiling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. HUMBERT, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 16, boulevard Malesherbes, à Paris.
1887. IERAHIM EFFENDI, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. ISSALY (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. JAXIN, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. JOYQUIÈRE (Alfred). Docteur en Philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1880. KÖNIGS, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 73, à Paris.
1890. KÖRBER (Gustaf), Gothenbourg (Suède).
1881. LACOR, professeur de Mathématiques, 10, rue Stanislas, à Paris.
1890. LAGERBORG (M^{lle}), à Helsingfors (Finlande).

Date
de
l'admission.

1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Palestro (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, directeur des études à l'école Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LÉVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 2, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUVE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIV, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1872. MALEYX, ancien professeur au collège Stanislas, à Mercier, près Coussac-Bonneval (Haute-Vienne).
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1872. MAXMEHL, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1884. MARTIN (Artemas). U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue Lhomond, 60, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timofioska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TAMBORREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique), S. P.
1884. MERCEAU, licencié ès Sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris. S. P.
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MIKHOPADINAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).

Date
de
l'admission

1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Selessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (v'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. OVIDIO (Enrico v'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. PAPELIER (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barren-tin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, rue Claude-Bernard, 17, à Paris.
1872. PARMENTIER (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. PAUTOYVIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, lieutenant-colonel d'Artillerie, directeur de la Manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. PERRIN, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1873. PHILIPPOX, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'Ecole Polytech-nique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. POKORNY (Martin), directeur du Lycée communal, à Prague (Bohème).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), 6, cité Odiet, rue Washington, à Paris, S. P.
1877. POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. PRESLE (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Mouge, 82, à Paris.
1872. PUTZ (le général), rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris, S. P.
1874. REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
1872. RIRACOUR, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. ROBIV (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. ROUCHÉ (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'Ecole Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. ROUQUET, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'Ecole-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. RUSSO (Giovanni), professeur, Discesa Case Arse, 1, Catanzaro (Italie).

Date
de
l'admission.

1881. SAINT-PAUL (Ducur DE), lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, Grande Allée, 17, à Toulouse (Haute-Garonne).
1889. SARAZ, professeur de Mathématiques, rue Saint-Sulpice, 25, à Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mande (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1877. SÉGEV, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. STIELFJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège), S. P.
1872. TANNERY (Paul), directeur des Manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris. S. P.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), contrôleur des Contributions diverses, rue Clanzel, à Alger, S. P.
1882. TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1872. TERRIER, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1872. TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. VANDAME, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
1885. VANECEK (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université de Pise (Italie).
1880. WALCKENAER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'École Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. WEYR (Dr Émile) professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).

Date
de
l'admission.

1882. WILSON, avenue d'Iena, 2, à Paris.
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. ZEETHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark)
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédac- teur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathe- matik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Ma- thematik</i> (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bo- logne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astrono- micas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (ré- dacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate</i> .	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Italie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Russie.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Bavière.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	États-Unis d'Amérique.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	Russie.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	France.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Suède.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Italie.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Washington.....	Smithsonian Institution.	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Etats-Unis d'Amérique.
		Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JANVIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. FOURET : *Sur une manière de déduire du théorème de Budan-Fourier une limite inférieure des racines d'une équation.*

M. RAFFY fait une Communication *Sur les réseaux conjugués qui se conservent dans la déformation des surfaces.* Il rappelle que les trois coordonnées d'une surface, considérées comme fonctions des paramètres d'un réseau conjugué, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, dont les coefficients ne dépendent que de l'élément linéaire de la surface. Il montre que, *si une seule des coordonnées vérifie cette équation, les deux autres la vérifient aussi, sauf dans le cas des cylindres.* D'où l'explication de ce fait que les surfaces, dont on connaît des déformations conservant un réseau conjugué, ne dépendent que d'un seul paramètre, abstraction faite des paramètres de position.

M. Ém. Picard communique la Note suivante :

Sur la fonction exponentielle;

par M. D'ARONE.

Désignons par $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ deux fonctions de n variables réelles, finies et continues ainsi que leurs dérivées premières, admettant des dérivées secondes finies et satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

fonctions qui, d'après un théorème connu ⁽¹⁾, doivent pouvoir croître indéfiniment pour des valeurs toujours croissantes des variables.

Nous allons démontrer que, *si la différence*

$$(1) \quad A = e^M(x_1, x_2, \dots, x_n) - e^N(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une constante différente de zéro, les fonctions M et N se réduisent à des constantes.

En effet, la différence A étant une constante et les deux expressions $\Delta^2 M$, $\Delta^2 N$ étant nulles, on a

$$(2) \quad e^M \frac{\partial M}{\partial x_i} = e^N \frac{\partial N}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$(3) \quad \begin{cases} e^M \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial M}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ = e^N \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial N}{\partial x_n} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Élevant au carré et ajoutant les n égalités (2), on obtient

$$(4) \quad \begin{cases} e^{2M} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial M}{\partial x_n} \right)^2 \right] \\ = e^{2N} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial N}{\partial x_n} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Mais, comme on peut le voir, les relations (1), (3) et (4) ne peu-

(1) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 152.

vent exister que si l'on a identiquement

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0, & \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, & \dots, & \quad \frac{\partial M}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial x_1} = 0, & \quad \frac{\partial N}{\partial x_2} = 0, & \dots, & \quad \frac{\partial N}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}, \quad N(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

Considérons maintenant la relation

$$(5) \quad e^{G(z)} - e^{P(z)} = \Lambda,$$

où $G(z)$ et $P(z)$ sont des fonctions entières de la variable complexe z et Λ une constante différente de zéro. Si $G(z)$ et $P(z)$ sont entières rationnelles, alors en dérivant l'identité (5) et supprimant les racines communes des deux polynômes $G'(z)$, $P'(z)$ qui sont du même degré de multiplicité, on démontre que *si la différence de deux fonctions exponentielles, dont les exposants sont deux fonctions entières rationnelles, est constante, ces deux fonctions doivent se réduire à deux constantes*

Si $G(z)$ et $P(z)$ sont des fonctions entières transcendentes, au sens de Weierstrass, ce que nous avons dit nous permet d'affirmer que la différence $e^M - e^N$, où M et N représentent les parties réelles des fonctions $G(z)$, $P(z)$, est une fonction de deux variables réelles à variabilité limitée dans le sens de Jordan.

Si donc on pouvait démontrer la constance de la valeur de la dernière fonction, on se trouverait avoir démontré dans toute sa généralité la proposition que nous avons donnée pour des valeurs entières rationnelles des exposants.

Cette dernière propriété nous permettrait de démontrer par voie directe, sans recourir aux fonctions modulaires, un des théorèmes les plus importants de l'analyse moderne, dû à M. Picard :

Si une fonction $f(z)$, holomorphe dans tout le plan, ne prend jamais ni la valeur a ni la valeur b , elle se réduit à une constante ⁽¹⁾.

(¹) PICARD, *Sur les fonctions entières* (Comptes rendus, 1879, 2^e semestre) et *Mémoire sur les fonctions entières* (Annales de l'École Normale supérieure; 1880).

En effet, la théorie des fonctions permet d'écrire

$$f(z) - a = e^{G(z)},$$

$$f(z) - b = e^{P(z)},$$

d'où

$$e^{G(z)} - e^{P(z)} = b - a = \text{const.}$$

On aurait donc $G = \text{const.}$, $P = \text{const.}$ et, par suite, aussi $f(z) = \text{const.}$

SÉANCE DU 20 JANVIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Hermann : *Sur quelques procédés de Cryptographie.*

M. Antomari : *Sur les podaires et les courbes polaires réciproques.*

M. Félix Lucas : *Sur un mode d'intégration de certaines équations linéaires du premier ordre.*

M. FOURET fait la Communication suivante :

Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique.

1. Il existe, comme on le sait, plusieurs méthodes pour trouver une limite supérieure des racines d'une équation algébrique et, notamment, une règle remarquable, due à Newton, qui présente l'avantage de fournir, pour cette limite, un nombre moins grand que les autres règles connues. Quant à la détermination d'une limite inférieure des racines d'une pareille équation $F(x) = 0$, on a coutume de la ramener à la recherche d'une limite supérieure des racines de $F(-x) = 0$. Ce procédé indirect est défectueux. La limite inférieure qu'il fournit est toujours négative et sa valeur absolue est généralement plus grande qu'il ne conviendrait. Voici une méthode, vraisemblablement nouvelle et, en tous cas, inconnue

dans l'enseignement ⁽¹⁾, qui ne présente pas ces inconvénients. Elle jouit en outre des mêmes privilèges que la règle de Newton, dont elle est, en quelque sorte, la contre-partie. On la déduit immédiatement du théorème suivant :

2. *Tout nombre qui, substitué à x dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$.*

Soit a un nombre, positif ou négatif, qui, substitué dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Nous allons montrer que $F(x)$ ne peut s'annuler pour aucun nombre plus petit $a - h$ ($h > 0$).

On a, en effet,

$$\begin{aligned} F(a-h) &= F(a) - h F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) - \dots \\ &= (-1)^p \frac{h^p}{1.2\dots p} F^{(p)}(a) + \dots + (-1)^m \frac{h^m}{1.2\dots m} F^{(m)}(a), \end{aligned}$$

D'une manière générale, et par hypothèse, $F^{(p)}(a)$ est du signe de $F(a)$ ou d'un signe contraire, suivant que p est pair ou impair et le terme $\frac{h^p}{1.2\dots p} F^{(p)}(a)$ est précédé, dans le développement précédent, du signe $+$ dans le premier cas, du signe $-$ dans le second. Donc $F(a-h)$ est une somme des termes tous de même signe et, par conséquent, ne peut être nul.

3. La marche à suivre, pour trouver une limite inférieure des racines de l'équation $F(x) = 0$ est tout indiquée. On part d'un nombre, aussi grand que possible, qui, substitué dans $F^{(m-1)}(x)$, donne un résultat de signe contraire à $F^{(m)}(x)$, c'est-à-dire un résultat négatif, en supposant positif le terme du plus haut degré de $F(x)$ ⁽²⁾. On vérifie si ce nombre rend positif $F^{(m-2)}(x)$, ou on le

⁽¹⁾ Cette règle nous a été suggérée par le théorème de Budan et Fourier, comme on peut le voir dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3^e série, t. XI, p. 82).

⁽²⁾ On peut même prendre, comme point de départ, le nombre qui annule la dérivée $F^{(m-1)}(x)$.

diminue, jusqu'à ce qu'il en soit ainsi. On examine ensuite si le nombre, ayant satisfait à cette épreuve, rend négatif $F^{m-3}(x)$; s'il n'en est pas ainsi, on le remplace par un autre plus petit, remplissant cette dernière condition, et l'on continue à procéder ainsi de proche en proche, sans qu'il y ait à revenir sur les essais déjà faits. On arrive ainsi finalement à un nombre inférieur aux racines de $F(x) = 0$ et en même temps aux racines des équations dérivées successives $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$, ..., $F^{(m-1)}_{(x)} = 0$.

Cette méthode offre deux particularités, qui la distinguent, au même titre que la règle de Newton : 1^o elle fournit un nombre aussi peu inférieur qu'on le veut à la plus petite des racines des équations $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$, ..., $F^{m-1}(x) = 0$; 2^o elle permet d'obtenir, dans le cas d'une équation ayant toutes ses racines réelles, un nombre aussi peu inférieur qu'on le veut à la plus petite racine de cette équation.

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable, donné sur une carte par des recouvrements non convergents.*

M. LAISANT fait connaître une autre solution du problème précédent.

M. Félix Lucas présente une remarque sur le même sujet.

M. Humbert : *Sur une propriété de la surface de Kummer.*

M. Kœnigs : *Sur les lignes asymptotiques des surfaces.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Transformation d'un polynôme entier.

Soit un polynôme entier de degré n

$$(1) \quad \varphi_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

que nous nous proposons de mettre identiquement sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} b_0 + b_1x + b_2x(x-1) + \dots \\ + b_px(x-1)\dots(x-p+1) + \dots + b_nx(x-1)\dots(x-n+1). \end{cases}$$

Si nous posons

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_p(x) = b_p + b_{p+1}(x-p) + b_{p+2}(x-p)(x-p-1) + \dots \\ \quad + b_n(x-p) \dots (x-p-n+1) \quad (p=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

nous avons évidemment

$$(4) \quad \begin{cases} b_0 = \varphi(0), & b_1 = \varphi_1(1), & b_2 = \varphi_2(2), & \dots \\ b_p = \varphi_p(p), & \dots & b_n = \varphi_n(n); \end{cases}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont en outre liées par les relations

$$(5) \quad \varphi_{p+1} = \frac{\varphi_p(x) - \varphi_p(p)}{x-p} \quad (p=1, 2, \dots, n).$$

Le polynôme $\varphi(x)$ étant donné sous la forme (1), on pourrait donc, au moyen de ces relations, déterminer successivement les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et, par conséquent, obtenir ainsi les divers coefficients $b_0, b_1, \dots, b_n$ par les formules (4).

Il est possible d'arriver à une solution plus directe, et peut-être plus élégante, en ne faisant figurer que les fonctions φ dans les diverses expressions de $b_0, b_1, \dots, b_n$. Si, en effet, nous calculons les premiers de ces coefficients, nous trouvons très facilement

$$\begin{aligned} b_0 &= \varphi(0), \\ b_1 &= \varphi_1(1) = \varphi(1) - \varphi(0), \\ b_2 &= \varphi_2(2) = \frac{\varphi(2) - 2\varphi(1) + \varphi(0)}{2!}, \end{aligned}$$

valeurs qui peuvent s'écrire symboliquement

$$b_0 = [\varphi - 1]^0, \quad b_1 = [\varphi - 1]^1, \quad b_2 = \frac{1}{2!} [\varphi - 1]^2, \quad \dots$$

avec cette convention que toute puissance de φ , telle que φ^m , sera remplacée par $\varphi(m)$ dans les résultats développés, et que l'unité sera remplacée par $\varphi(0)$.

On peut arriver à démontrer que la loi, qu'on prévoit par induction, est complètement générale, c'est-à-dire qu'on a symboliquement

$$(6) \quad b_p = \varphi_p(p) = \frac{1}{p!} [\varphi - 1]^p$$

pour toutes les valeurs entières de p jusqu'à n inclusivement.

Pour y parvenir, nous supposons la formule (6) vérifiée jusqu'à la valeur $p - 1$, et nous remarquerons en outre que, d'après la définition même de la fonction $\varphi_p(x)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \dots \\ & + b_{p-1} x(x-1) \dots (x-p+2) + x(x-1) \dots (x-p+1) \varphi_p(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après nos hypothèses,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi(0) + \frac{x}{1} [\varphi - 1] + \frac{x(x-1)}{2!} [\varphi - 1]^2 + \dots \\ = & \frac{x(x-1) \dots (x-p+2)}{(p-1)!} [\varphi - 1]^{p-1} + x(x-1) \dots (x-p+1) \varphi_p(x). \end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans cette formule x par p , elle donne

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(p) = & \varphi(0) + \frac{p}{1} [\varphi - 1] + \frac{p(p-1)}{2!} [\varphi - 1]^2 + \dots + p [\varphi - 1]^{p-1} \\ & + p! \varphi_p(p). \end{aligned} \right.$$

Ajoutons à la première ligne et retranchons à la seconde le terme $[\varphi - 1]^p$. La première ligne pourra alors s'écrire symboliquement $[1 + \varphi - 1]^p$; et, comme les calculs de réduction des coefficients, une fois les développements effectués, sont identiquement les mêmes que pour des calculs de puissances, il s'ensuit que ce développement symbolique $[1 + \varphi - 1]^p$ se ramènera bien réellement à $[\varphi]^p$, ou $\varphi(p)$ en vertu des conventions faites. La relation (7) devient donc

$$\varphi(p) = \varphi(p) - [\varphi - 1]^p + p! \varphi_p(p)$$

ou

$$(8) \quad \varphi_p(p) = b_p = \frac{1}{p!} [\varphi - 1]^p,$$

ce qui établit bien la généralité de la loi vérifiée.

Il est évident que $b_0 = a_0 = \varphi(0)$. On a aussi $b_m = a_m$, à cause de l'identité des deux formules (1) et (2).

Enfin, pour une valeur de p supérieure à m , le coefficient b_p correspondant est nul. Par conséquent, la formule symbolique

$$\frac{1}{p!} [\varphi - 1]^p$$

donne les coefficients b_p de la formule (2) pour $p < m$. Elle donne a_m pour $p = m$ et, enfin, pour $p > m$, on a $[\varphi - 1]^p = 0$.

La formule (2) peut s'écrire, d'après ce que nous venons de voir,

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(0) + x[\varphi-1]^1 + \frac{x(x-1)}{2!} [\varphi-1]^2 + \dots \\ \quad + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} [\varphi-1]^n. \end{cases}$$

Si l'on y remplace x par $-x$, elle devient

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi(-x) = \varphi(0) - x[\varphi-1]^1 + \frac{x(x+1)}{2!} [\varphi-1]^2 - \dots \\ \quad + (-1)^n \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!} [\varphi-1]^n. \end{cases}$$

Par suite nous avons, pour toutes les fonctions paires, une nouvelle forme de la fonction $\varphi(x)$ au moyen de cette relation (10); et, en changeant tous les signes du second membre, nous avons un développement s'appliquant aux fonctions impaires.

La soustraction des relations (9) et (10) dans le premier cas, l'addition dans le second, nous donnent donc les deux propositions suivantes :

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier ne contenant que des puissances paires de x , le développement symbolique

$$\begin{aligned} 2[\varphi-1]^1 x + \frac{[\varphi-1]^2}{2!} [x(x-1) - x(x+1)] \\ - \frac{[\varphi-1]^3}{3!} [x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x+2)] + \dots \end{aligned}$$

est identiquement nul.

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier ne contenant que des puissances impaires de x , le développement symbolique

$$\begin{aligned} 2\varphi(0) + \frac{[\varphi-1]^2}{2!} [x(x-1) + x(x+1)] \\ + \frac{[\varphi-1]^3}{3!} [x(x-1)(x-2) - x(x+1)(x+2)] + \dots \end{aligned}$$

est identiquement nul.

NOTE. — Le problème qui fait l'objet de cette Communication a déjà été résolu par M. Maurice d'Ocagne, en suivant une voie différente (*American Journal of Mathematics*, vol. XIII, n° 2).

La solution de M. d'Ocagne repose sur l'emploi des nombres remarquables K_m^p , qu'il a imaginés et étudiés dans de très intéressants Mémoires. La formule à laquelle il arrive, les notations étant les mêmes que dans la présente Communication, est la suivante :

$$b_p = K_p^p a_p + K_{p+1}^p a_{p+1} + \dots + K_n^p a_n.$$

En remplaçant les nombres K_m^p par leurs valeurs explicites en fonctions de m et de p , valeurs données par M. d'Ocagne dans son Mémoire *Sur une classe de nombres remarquables* (*American Journal*, 1887, p. 357), on retrouve précisément la formule symbolique (6) établie ci-dessus.

Cette dernière offre donc, par une marche inverse, un nouveau moyen d'obtenir, en fonction de m et de p , l'expression explicite des nombres K_m^p .

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections : M. Demoulin, présenté par MM. d'Ocagne et Raffy ; M. Hermann, présenté par MM. Désiré André et Kœnigs, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. d'Ocagne : *Nouvelle construction du point le plus probable déterminé sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Lemoine développe certaines considérations, tendant à constituer une sorte d'*art des constructions géométriques*, au point de vue de la simplicité et de l'exactitude du tracé.

M. FÉLIX LUCAS communique la Note suivante :

Note relative aux points centraux.

Soit

$$(1) \quad f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p) = 0$$

l'équation d'un système plan de p points quelconques. Je regarde ces points comme matériels et ayant l'unité de masse.

En égalant à zéro les dérivées successives de $f(z)$, nous obtiendrons les *points centraux* d'ordres successifs du système de points considérés.

Soit S_1 la somme des racines $z_1, z_2, \dots, z_p$; le point central d'ordre $(p-1)$, qui se détermine en annulant la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(z)$, a pour coordonnée affixe $\frac{S_1}{p}$; c'est le centre de gravité G du système proposé.

Soit S_2 la somme des produits deux à deux des racines $z_1, z_2, \dots, z_p$; les deux points centraux d'ordre $(p-2)$, dont l'équation s'obtient en annulant la $(p-2)^{\text{ième}}$ dérivée de $f(z)$, ont pour coordonnées affixes les deux racines de l'équation

$$(2) \quad \frac{p(p-1)}{2} z^2 - (p-1)S_1 z + S_2 = 0;$$

le milieu de ces deux points coïncide avec G , en sorte que la droite qui les joint passe par le centre de gravité du système proposé; il s'agit de caractériser la direction de cette droite.

A cet effet, supposons que le point G ait été pris pour origine des coordonnées et que l'axe des x ait été dirigé suivant la droite considérée; dans cette hypothèse, S_1 sera nul, et S_2 devra, d'après l'équation (2), être réel et positif. Or on a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum z_m z_n = \sum (x_m + y_m \sqrt{-1})(x_n + y_n \sqrt{-1}) \\ &= \sum (x_m x_n - y_m y_n) + \sqrt{-1} \sum (x_m y_n + x_n y_m); \end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$0 = \sum (x_m y_n + x_n y_m),$$

ou, ce qui revient au même, puisque la somme S_1 est nulle,

$$\sum x_m y_m = 0;$$

il en résulte que l'axe des x se trouve en coïncidence avec un des axes principaux d'inertie du système de points proposés. Par conséquent, *la droite qui joint les deux points centraux d'ordre $(p-2)$ d'un système plan de p points est dirigée suivant un des axes principaux d'inertie de ce système.*

On en déduit ce théorème :

Un système plan de points et les systèmes de ses points centraux successifs admettent les mêmes directions principales d'inertie.

Pour que l'ellipse d'inertie du système de points considéré devienne un cercle, il faut et il suffit que les deux points centraux d'ordre $(p - 2)$ coïncident. On a alors, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité, et quels que soient les axes rectangulaires des coordonnées,

$$S_2 = \sum z_m z_n = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$S z_m^2 = 0.$$

De là ce théorème :

Pour que l'ellipse d'inertie d'un système plan de points soit une circonférence, il faut et il suffit que la somme des carrés de leurs coordonnées affixes, relativement à deux axes rectangulaires quelconques passant par leur centre de gravité, soit identiquement nulle. Dans ce cas, tous les systèmes de points centraux des divers ordres admettent des circonférences pour ellipses d'inertie.

M. LAISANT communique la Note suivante :

Note relative au symbole $\sqrt{-1}$, et en général à l'opération p^q .

Sous le titre de *Théorie des acceptions*, il a paru, en 1891, un Volume de M. Évrard, ingénieur des Ponts et Chaussées en retraite, et qui contient surtout l'exposé des travaux de feu M. l'abbé George sur les imaginaires. Ce Livre renferme des choses intéressantes, et montre, notamment, que M. l'abbé George avait reconstitué presque intégralement, sans la connaître en aucune façon, la doctrine due aux travaux d'Argand, de Mourey, de Cauchy et de Bellavitis.

Mais, à côté de déductions rigoureuses, l'auteur a commis, à notre avis, une erreur fondamentale en voulant donner au symbole $\sqrt{-1}$ (ou $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$) une signification géométrique arbitraire, et en essayant de créer ainsi une Algèbre des faits de l'espace, fondée sur les opérations auxquelles il soumet ce symbole. Comme beaucoup d'auteurs qui se sont livrés à des tentatives analogues, il arrive à des résultats géométriques exacts; mais ce succès, qu'on peut atteindre de bien des manières, n'est obtenu qu'au prix d'une affirmation qui renverserait toute l'analyse, lui enlè-

verait sa généralité, et rendrait impossible le calcul des imaginaires, au moins dès qu'il s'agit de fonctions exponentielles ou logarithmiques.

En particulier, et l'on peut dire que toute la théorie des acceptions repose là-dessus, l'auteur conteste avec grande énergie l'identité bien connue $i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Peut-être n'est-il pas inutile de revenir encore une fois sur ce sujet, pour essayer d'éclaircir certains points qu'en général on ne précise pas assez. Au fond, comme on va le voir, la question est cependant bien simple.

Si l'on veut que le calcul analytique soit possible, il faut admettre, par définition ou par convention, les identités

$$A^B A^C = A^{B+C}, \quad (A^B)^C = A^{BC}, \quad (AB)^C = A^C B^C.$$

Ceci posé, cherchons la signification de p^q , p et q étant deux quantités imaginaires.

Appelons respectivement a et b les modules de p et de q ; puis α et β les arguments des mêmes quantités. Il faut bien remarquer qu'une quantité imaginaire quelconque a, non pas un argument unique tel que α , mais une infinité d'arguments compris dans la formule $2k\pi + \alpha$. Dans nos résultats, il faudra donc, si l'on a donné les quantités sans préciser leurs arguments, remplacer α et β par $2k\pi + \alpha$ et $2k'\pi + \beta$, k et k' étant deux nombres entiers, positifs ou négatifs, indéterminés.

Nous avons

$$p = ae^{i\alpha}, \quad q = b(\cos \beta + i \sin \beta)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} p^q &= (ae^{i\alpha})^{b \cos \beta + ib \sin \beta} \\ &= a^{b \cos \beta} a^{ib \sin \beta} e^{i\alpha b \cos \beta} e^{-\alpha b \sin \beta}; \end{aligned}$$

a est un nombre positif qui peut s'écrire e^{la} . Alors,

$$\begin{aligned} p^q &= e^{bla \cos \beta + ibla \sin \beta + i\alpha b \cos \beta - \alpha b \sin \beta} \\ &= e^{b(la \cos \beta - \alpha \sin \beta)} e^{ib(la \sin \beta + \alpha \cos \beta)}. \end{aligned}$$

Ainsi p^q est une quantité imaginaire dont le module et l'argument se présentent sous les formes

$$e^{b(la \cos \beta - \alpha \sin \beta)} \quad \text{et} \quad b(la \sin \beta + \alpha \cos \beta).$$

Mais, si l'on s'est contenté de donner les quantités p et q , sans préciser leurs arguments, il reste, comme nous l'avons dit plus

haut, une indétermination, si bien qu'il faut remplacer α et β par leurs valeurs plus générales $2k\pi + \alpha$, $2k'\pi + \beta$. En ce qui concerne β , cela ne changera rien, les lignes $\sin \beta$ et $\cos \beta$ figurant seules. Pour α , au contraire, la modification sera réelle, et il faut constater que le module de p^q sera le nombre (positif) ayant pour logarithme

$$b[la \cos \beta - (2k\pi + \alpha) \sin \beta],$$

et que l'argument sera

$$b[la \sin \beta + (2k\pi + \alpha) \cos \beta].$$

Alors p^q représente non pas *une* quantité imaginaire, mais *une infinité* de quantités, dont les modules différents forment une progression par quotient, et les arguments une progression par différence. De même, par exemple, dans l'Algèbre élémentaire, on voit le symbole $\sqrt{-1}$ représenter *deux* quantités différentes, $+1$ et -1 .

Si, en particulier, on suppose $a = b = 1$ et $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $p = i$, $q = i$, on a

$$i^i = e^{-(2k + \frac{1}{2})\pi}.$$

Ce symbole i^i représente donc une infinité de quantités *toutes réelles*, formant une progression par quotient dont la raison est $e^{2\pi}$.

L'une seulement de ces quantités est $e^{-\frac{\pi}{2}}$, et c'est un tort, en effet, d'écrire sans autre explication

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207875, \dots$$

Si l'on représente par γ ce nombre $e^{-\frac{\pi}{2}}$, i^i représente *l'un quelconque* des termes de la progression

$$\dots, \frac{1}{\gamma^{k-1}}, \dots, \frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{\gamma^3}, \gamma, \gamma^3, \gamma^5, \dots, \gamma^{k+1}, \dots$$

Il est possible, par un tel symbole exponentiel, de représenter aussi une progression géométrique quelconque à termes positifs.

Soient, en effet, f l'un des termes et g la raison. Posons, comme plus haut, $a = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$; et, en outre, $\alpha = 2\pi \frac{lf}{g}$, $b = -\frac{1}{2\pi} l g$, ce qui donnera toujours, pour b , un résultat posi-

tit, g pouvant être pris plus petit que l'unité. La formule

$$p^q \text{ ou } (e^{2i})^{bi}$$

représentera l'un *quelconque* des termes de la progression donnée

$$\dots, \frac{f}{g^2}, \frac{f}{g}, f, fg, fg^2, \dots$$

On vérifie, en effet, qu'en laissant à α son indétermination, l'expression p^q , d'après les valeurs ci-dessus, se réduit à

$$e^{df+klg} = fg^k.$$

M. LUCIEN LÉVY fait la Communication suivante :

Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux.

Soient

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}, & q &= \frac{\partial z}{\partial y}, & H &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ A &= (1+q^2)s - pqt, & C &= pqr - (1+p^2)s, \\ B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r. \end{aligned}$$

Toute solution de l'équation de M. Maurice Lévy

$$A \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

donnera, d'après une remarque de M. Darboux, une surface qui, par une translation parallèle à Oz , engendre une famille de Lamé, c'est-à-dire une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

J'ai fait connaître, au mois de juin, une solution contenant deux fonctions arbitraires : ce sont les surfaces à lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à Oz . Quelques jours plus tard, M. Petot, par une très ingénieuse transformation géométrique, trouvait un certain nombre de solutions nouvelles, et signalait aussi celle que je viens de rappeler.

Je veux, aujourd'hui, faire connaître toutes les surfaces enveloppes de sphères qui jouissent de la même propriété. Dans les solutions que je vais indiquer, il subsiste une fonction arbitraire.

1° Les surfaces-canal, enveloppées par une sphère dont le centre décrit une courbe plane arbitraire située dans un plan perpendiculaire à Oz . Cette solution était à peu près évidente.

2° Les périsphères symétriques par rapport à un plan passant par Oz . La directrice est encore quelconque; l'équation différentielle ordinaire, qui fait connaître la loi de variation du rayon de la sphère enveloppée, est susceptible d'une interprétation géométrique : les cylindres de révolution, qui ont pour bases les différentes lignes de courbure circulaires, interceptent sur l'axe Oz une longueur constante.

3° Les enveloppes de sphères, dans lesquelles chaque sphère touche son enveloppe suivant une circonférence de rayon nul. Ces surfaces se réduisent à une combe.

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur certaines surfaces spirales.

Comme on connaît les géodésiques des surfaces de révolution, on sait intégrer, quel que soit m , l'équation

$$(1) \quad P^2 + P'^2 = \cos^{2m-2} \frac{u}{m},$$

dont dépendent les géodésiques des spirales applicables sur les surfaces de révolution. On sait, d'autre part (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1421), que la détermination des spirales d'élément linéaire

$$(2) \quad ds^2 = e^{2v} U^2 (du^2 + dv^2)$$

revient à l'intégration de l'équation

$$(3) \quad k^2 (z_0^2 + z_0'^2) = k^2 U^2 - U'^2.$$

Supposons que l'on prenne

$$(4) \quad U = \cos^2 \frac{2u}{9}, \quad k^2 = \frac{1}{27}.$$

L'équation (3) devient

$$(5) \quad z_0^2 + z_0'^2 = \cos \frac{2u}{3}.$$

On voit qu'il suffit de faire $2m = 3$ pour identifier (1) et (5). On connaît donc une série simplement infinie de spirales admettant l'élément linéaire (2) dans l'hypothèse (4).

SÉANCE DU 2 MARS 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Laisant : *Sur les points centraux des systèmes de points dans l'espace.*

M. Félix Lucas démontre la proposition suivante :

Si la loi d'un mode de fonctionnement d'une machine d'ynamo peut s'exprimer au moyen d'une équation algébrique concrète à trois termes entre deux variables, on peut toujours, en remplaçant les variables concrètes par des variables arbitraires qui leur sont proportionnelles, transformer cette équation concrète en une équation purement numérique, absolument indépendante des éléments concrets de la machine considérée.

SÉANCE DU 16 MARS 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Carvallo : *Sur les lois abstraites du fonctionnement des machines.*

M. Fouret : *Sur la génération des congruences du premier ordre et de classe quelconque.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse.

Étant donné un système plan de p points matériels P , ayant tous l'unité de masse, j'ai démontré précédemment que la droite de jonction des deux points centraux d'ordre $(p - 2)$ coïncide avec l'un des axes de l'ellipse centrale d'inertie du système. Si l'on désigne par M la somme des affixes z_n des p points pour un système quelconque d'axes rectangulaires, et par N la somme des carrés z_n^2 de ces affixes, on déterminera les deux points cen-

traux dont il s'agit par l'équation

$$(1) \quad z^2 - \frac{2M}{p} z + \frac{M^2 - N}{p(p-1)} = 0.$$

Lorsque l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité G des points P, le paramètre M est nul et l'équation ci-dessus se réduit à

$$(2) \quad z^2 = \frac{N}{p(p-1)}.$$

Supposons que l'axe des x se trouve dirigé suivant la ligne de jonction de ces deux points; z deviendra égal à leur demi-distance R; N deviendra égal à $p(B^2 - A^2)$, A et B désignant les rayons de giration principaux relatifs à GX et à GY; nous aurons donc

$$(3) \quad (p-1)R^2 = B^2 - A^2.$$

Cette formule indique que *c'est toujours avec le grand axe de l'ellipse d'inertie que coïncide la droite de jonction des deux points centraux d'ordre $(p-2)$* . Elle montre en outre que *la différence des carrés des rayons de giration principaux est égale à $(p-1)$ fois le carré de la demi-distance des deux points centraux d'ordre $(p-2)$* .

Pour que l'ellipse principale d'inertie devienne une circonférence, il faut et il suffit que l'équation (1) ait ses racines égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$(4) \quad M^2 = pN.$$

Supposons que cette condition soit remplie et remplaçons le point P_n , dont l'affixe est z_n , par le point P'_n , dont l'affixe est $z_n + \zeta_n$. Les paramètres M et N seront respectivement remplacés par $(M + \zeta_n)$ et par $(N + 2z_n\zeta_n + \zeta_n^2)$; la condition nécessaire et suffisante pour que cette déformation du système de points n'empêche pas l'ellipse principale d'inertie d'être une circonférence sera

$$(5) \quad (p-1)\zeta_n + 2(pz_n - M) = 0.$$

Aucune hypothèse particulière n'ayant été faite sur le choix des axes, nous pouvons placer l'origine au centre de gravité G des points P, de manière à annuler M; nous aurons alors

$$(6) \quad \zeta_n = -\frac{2p}{p-1} z_n.$$

On obtient par conséquent P'_n en prolongeant la droite $P_n G$ de la longueur

$$GP'_n = \frac{p+1}{p-1} GP_n.$$

En faisant occuper par les points P les sommets d'un polygone régulier, on peut obtenir, par des déformations successives, diverses figures dont les ellipses centrales d'inertie sont des circonférences.

M. GUIMARAËS adresse la Note suivante :

Sur trois normales spéciales à l'ellipse.

1. Le point de *déviatiou maxima* étant défini par

$$x = a \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad y = b \sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

la normale en ce point a pour équation

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = \frac{c^2}{\sqrt{a+b}},$$

et les segments ON et ON' que cette normale intercepte sur les axes sont

$$ON = \frac{c^2}{\sqrt{a(a+b)}}, \quad ON' = \frac{c^2}{\sqrt{b(a+b)}}, \quad NN' = \frac{c^2}{\sqrt{ab}}.$$

Le triangle ONN' étant rectangle, on obtient, en vertu du théorème de Stewart ⁽¹⁾, D étant un point quelconque sur NN' ,

$$(1) \quad \overline{ON'}^2 \cdot \overline{DN}^2 + \overline{ON}^2 \cdot \overline{DN'}^2 = \overline{NN'}^2 \cdot \overline{OD}^2.$$

Si le point D est au milieu de NN' , on a

$$\overline{ON}^2 + \overline{ON'}^2 = 4\overline{OD}^2,$$

d'où

$$(2) \quad \overline{OD} = \frac{c^2}{2\sqrt{ab}},$$

et

$$\sin \widehat{DOA} = \frac{ON'}{2\overline{OD}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \tan \widehat{DOA} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

(1) Voir *El Progreso matematico*, t. I, p. 195.

Si OD est perpendiculaire à NN', la formule (1) devient

$$\overline{ON}^2 \cdot \overline{ON'}^2 = \overline{OD}^2 \cdot \overline{NN'}^2,$$

d'où

$$OD = \frac{c^2}{a+b}.$$

2. La normale au point défini par les coordonnées

$$x = y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

qui est le point d'intersection de l'ellipse avec un vecteur faisant avec le grand axe un angle $\frac{\pi}{4}$, a pour équation

$$a^2x - b^2y = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

d'où

$$ON = \frac{bc^2}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad ON' = \frac{ac^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad NN' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Si OD est aussi perpendiculaire à NN', on voit que la relation (1) devient

$$\overline{ON}^2 \cdot \overline{ON'}^2 = \overline{OD}^2 \cdot \overline{NN'}^2,$$

d'où

$$(3) \quad OD = \frac{abc^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

et

$$\widehat{DOA} = \frac{b^2}{a^2}.$$

3. La normale au point défini par les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

a pour équation

$$x - y = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

d'où

$$ON = ON' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad NN' = ON \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

c'est-à-dire que le triangle rectangle ONN' est isocèle, et la formule (1) devient

$$\overline{ON}^2 + \overline{ON'}^2 = 2\overline{OD}^2.$$

Si D est au milieu de NN', on trouve

$$(4) \quad OD = \frac{c^2}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}},$$

et le triangle ODN est rectangle en D et isocèle, ce qui est évident, et par suite l'angle que OD fait avec le grand axe est $\frac{\pi}{4}$. On voit donc qu'il est toujours possible de mener une normale par un point D porté sur le plan d'une ellipse, si sa distance OD au centre O est exprimée par une des formules (2), (3), (4) et si OD fait avec le grand axe un angle dont la tangente soit $\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{b^2}{a^2}$, 1 respectivement.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique.

Je me propose d'indiquer brièvement la démonstration d'un théorème qui se trouve énoncé, à la suite d'une remarque de M. Goursat, dans un article *Sur l'homographie en Mécanique*, que j'ai publié dans le tome XII de l'*American Journal*, et d'en déduire la notion d'invariants d'un système. M. Dautheville et moi avons donné des cas particuliers de ce théorème (*Annales de l'École Normale*, t. VII, 1890; *American Journal*, t. XIII).

Soit un système matériel dont la configuration est définie par k paramètres $q_1, q_2, \dots, q_k$. Les équations du mouvement de ce système sous l'action de forces arbitraires ne dépendant que de sa position sont

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_x} = Q_x, \quad \dot{q}_x = \frac{dq_x}{dt},$$

Q_x ne dépendant que de $q_1, q_2, \dots, q_k$. Pour un deuxième système dont la configuration est définie par k paramètres $r_1, r_2, \dots, r_k$, on aura de même en appelant t_1 le temps

$$(2) \quad \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{r}_x} \right) - \frac{\partial S}{\partial r_x} = R_x, \quad \dot{r}_x = \frac{dr_x}{dt_1}.$$

On transformera l'un des mouvements dans l'autre, si l'on peut

trouver des fonctions φ_α et λ de $q_1, q_2, \dots, q_k$ telles qu'en posant

$$r_\alpha = \varphi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_k), \quad dt_1 = \lambda dt,$$

les équations (1) se transforment en (2). On aura alors des identités de la forme

$$3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=k} P_i^{(2)} \left[\frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial S}{\partial r_i} \right].$$

Les coefficients $P_i^{(2)}$ ne dépendent que de $r_1, r_2, \dots, r_k$, et non de leurs dérivées, comme on le voit en identifiant les termes contenant les dérivées secondes. L'expression Φ_α ne contient pas de dérivées secondes, mais chacun de ses termes contient des dérivées premières. Si la transformation est possible quelle que soit la loi des forces agissant sur l'un des systèmes, il faut qu'elle *annule* Φ_α , car autrement, d'après les équations (1) et (2), les Q_α contiendraient des dérivées dans leurs expressions, ce qui est contraire à l'hypothèse. Alors, les Φ_α étant nuls, les identités (3) montrent que la transformation transforme un mouvement du premier système, lorsque ce système n'est sollicité par aucune force (ce qu'on peut appeler un mouvement *géodésique* du premier système), en un mouvement analogue du second. Pour que cette transformation soit possible, il faut et il suffit que certains *invariants* soient égaux.

Nous donnerons prochainement les expressions de ces invariants, qui se rattachent aux recherches de M. Beltrami.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles; par M. L. RAFFY.

1. L'élément linéaire d'une spirale étant réductible à la forme

$$(1) \quad ds^2 = (dx^2 + dy^2) e^{\beta + f\lambda(x,y)dx},$$

il faut d'abord déterminer la fonction λ de manière que les lignes d'égale courbure ($R_1 R_2 = \text{const.}$) soient parallèles.

La courbure totale, égalée à une fonction d'un nouveau paramètre u , nous donne

$$(2) \quad \Lambda' e^{-\beta - \int \Lambda dz} = e^{-U_0/m},$$

relation qui revient à celle-ci

$$\beta = U_0(u) + \log \Lambda' - \int \Lambda dz.$$

Dès lors l'élément linéaire, exprimé en u et z , prend la forme

$$ds^2 = \Lambda' U_0'^2 e^{U_0} du^2 + 2\Lambda' \left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right) U_0 e^{U_0} du dz + \Lambda' \left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right] e^{U_0} dz^2.$$

En vertu de l'identité générale

$$E du^2 + 2F du dz + G dz^2 = \frac{EG - F^2}{G} du^2 + \frac{1}{G} (F du + G dz)^2,$$

nous pourrions l'écrire comme suit :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{U_0'^2 e^{U_0} du^2}{\frac{1}{\Lambda'} \left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right]} \\ &+ e^{U_0} \Lambda' \frac{\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2}{\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1} \left[U_0' du + \frac{\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1}{\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda} dz \right]^2; \end{aligned} \right.$$

et la surface sera rapportée aux lignes d'égale courbure $u = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales. Ces trajectoires étant, par hypothèse, des géodésiques, la fonction U_0 doit pouvoir être choisie de façon que le coefficient de du^2 se réduise à l'unité. D'où ces deux conditions

$$(4) \quad U_0'^2 e^{U_0} = \text{const.} = 2m,$$

$$(5) \quad \frac{1}{\Lambda'} \left[\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'} - \Lambda \right)^2 + 1 \right] = \text{const.} = 2m.$$

La première donne immédiatement

$$\frac{U_0'}{2} e^{\frac{U_0}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2}}, \quad e^{U_0} = \frac{mu^2}{2}, \quad U_0' = \frac{2}{u}.$$

La seconde peut, comme je l'ai montré antérieurement (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XIX, p. 65) s'intégrer par quadrature. Si l'on tient compte de l'une et de l'autre, l'élément

linéaire devient

$$(1)' \quad ds^2 = du^2 + u^2(2mA' - 1) \left(\frac{du}{u} + \frac{mA'dz}{\sqrt{2mA' - 1}} \right)^2.$$

Effectuons le changement de variable

$$(6) \quad \frac{du}{u} + \frac{mA'dz}{\sqrt{2mA' - 1}} = V_0(v)dv;$$

quelle que soit la fonction V_0 , les courbes $v = \text{const.}$ seront les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure $u = \text{const.}$ Mais si l'on prend $V_0 v = 1$, l'équation précédente donne

$$m \int \frac{A'dz}{\sqrt{2mA' - 1}} = \log \frac{v}{u},$$

ce qui montre que z est une fonction du rapport $u : v$. Par suite, l'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} f\left(\frac{u}{v}\right) dv^2;$$

d'où cette conclusion : *quand une spirale à lignes d'égale courbure parallèles est rapportée à ces lignes $u = \text{const.}$ et aux géodésiques orthogonales $v = \text{const.}$, on peut toujours faire en sorte que son élément linéaire soit une fonction homogène de u et de v .*

2. Cela posé, rappelons que, quand on rapporte une surface à ses lignes d'égale courbure, *supposées parallèles*, et à leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prend la forme

$$(e) \quad ds^2 = du^2 + W \frac{(U - V)^2}{U^2} dv^2,$$

en appelant U une fonction de u , U' sa dérivée, V et W deux fonctions de v . Nous allons, en vertu de ce qui précède, pouvoir déterminer ces trois fonctions de manière que le coefficient de dv^2 soit une fonction homogène et de degré zéro de u et de v . Nous aurons ainsi *toutes les formes possibles* de l'élément linéaire des spirales à lignes d'égale courbure parallèles.

Proposons-nous donc de satisfaire à l'équation

$$u \frac{\partial}{\partial u} \left[W \frac{(U - V)^2}{U^2} \right] - v \frac{\partial}{\partial v} \left[W \frac{(U - V)^2}{U^2} \right] = 0,$$

qui, développée et divisée par $W : U'$, peut s'écrire

$$(7) \quad \left(\frac{W'v}{W} - \frac{U''u}{U'} \right) (U - V) + 2U'u - 2V'v = 0.$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre, prise par rapport à u et à v ; il vient

$$(8) \quad U' \left(\frac{W'v}{W} \right)' + V' \left(\frac{U''u}{U'} \right)' = 0.$$

L'hypothèse particulière $V' = 0$ donne des spirales applicables sur des surfaces de révolution. Elle entraîne

$$\frac{W'v}{W} = \text{const.} = -n, \quad W = \frac{1}{v^n}.$$

Si, dans l'équation (7), nous faisons $V' = 0$, et, ce qui est permis, $V = 0$, en même temps que $W = v^{-n}$, nous obtenons une relation qui revient à

$$\frac{d}{du} \log \frac{U^2}{U'} = \frac{n}{u}.$$

On en déduit par une intégration immédiate l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^n}{v^n} dv^2,$$

qui convient à toutes les spirales applicables sur des surfaces de révolution. En effet, la condition $V = \text{const.}$ est nécessaire pour que l'élément linéaire (e) convienne à des surfaces de révolution, où les trajectoires des lignes d'égale courbure sont les méridiens.

3. Supposons maintenant $V' \neq 0$. L'équation (8) peut s'écrire

$$\frac{1}{V'} \left(\frac{W'v}{W} \right)' = - \frac{1}{U'} \left(\frac{U''u}{U'} \right)' = \text{const.} = -2m;$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(9) \quad \frac{U''u}{U'} = 2mU - a, \quad \frac{W'v}{W} = -2mV - b.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), donnent

$$-2m(U^2 - V^2) + (a - b)(U - V) + 2U'u - 2V'v = 0,$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$2mU^2 - (a-b)U - 2U'u = \text{const.} = -2h,$$

$$2mV^2 - (a-b)V - 2V'v = \text{const.} = -2h.$$

Mais la première de ces relations, différenciée et rapprochée de la première des formules (9), entraîne $a + b = 2$, ce qui conduit à poser $a = 1 - 2c$, $b = 1 + 2c$; alors les trois fonctions inconnues U , V , W sont déterminées par les équations

$$\frac{U'}{mU^2 + 2cU + h} = \frac{1}{u}, \quad \frac{V'}{mV^2 + 2cV + h} = \frac{1}{v},$$

$$\frac{W'}{W} + \frac{2mV + 2c + 1}{v} = 0.$$

Les deux premières étant les mêmes, il suffit d'intégrer

$$\frac{dy}{my^2 + 2cy + h} = \frac{dx}{x}.$$

Il convient de distinguer trois cas principaux, suivant que le trinôme dénominateur est du second degré, s'abaisse au premier ou se réduit à une constante.

4. PREMIER CAS : $m \neq 0$. — Nous pouvons remplacer c par mc , h par mh , et prendre

$$\frac{dy}{y^2 + 2cy + h} = m \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{2m(V+c)+1}{v} = 0.$$

1° Si les racines du trinôme en y sont distinctes, nous aurons

$$\frac{dy}{(y+\alpha)(y+\beta)} = m \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{m(2V+\alpha+\beta)+1}{v} = 0;$$

intégrant et désignant par A , B , C trois constantes arbitraires, il vient

$$U = -\alpha + \frac{\alpha - \beta}{1 - A u^{m(\alpha - \beta)}}, \quad V = -\alpha + \frac{\alpha - \beta}{1 - B v^{m(\alpha - \beta)}};$$

$$\frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{m(\alpha - \beta)}{v} \frac{1 + B v^{m(\alpha - \beta)}}{1 - B v^{m(\alpha - \beta)}} = 0, \quad Wv = C v^{-m(\alpha - \beta)} [1 - B v^{m(\alpha - \beta)}]^2;$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{C}{Am} \frac{u}{v} \left[A \left(\frac{u}{v} \right)^{\frac{m(\alpha - \beta)}{2}} - B \left(\frac{v}{u} \right)^{\frac{m(\alpha - \beta)}{2}} \right]^2 dv^2;$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(10) \quad ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[A_1 \left(\frac{u}{v} \right)^n + B_1 \left(\frac{v}{u} \right)^n \right]^2 dv^2,$$

avec trois nouvelles arbitraires A_1, B_1 et n .

2° Si les racines du trinôme en x sont égales, on a

$$\begin{aligned} U &= -c + \frac{1}{\log A u^m}, & V &= -c + \frac{1}{\log B v^m}; \\ \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{2m}{v \log B v^m} &= 0, & Wv &= C (\log B v^m)^2; \\ ds^2 &= du^2 + C m \frac{u}{v} \left(\log \frac{A u^m}{B v^m} \right)^2 dv^2; \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left(A_1 \log \frac{u}{v} + B_1 \right)^2 dv^2.$$

SECOND CAS : $m = 0, c \neq 0$. — Remplaçons h par $2ch$; il viendra

$$\frac{dy}{y+h} = 2c \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{2c+1}{v} = 0;$$

d'où, en intégrant et désignant par A, B, C trois arbitraires,

$$\begin{aligned} U &= -h + A u^{2c}, & V &= -h + B v^{2c}, & W &= C v^{-2c-1}; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{2Ac} \frac{u}{v} \left[A \left(\frac{u}{v} \right)^c - B \left(\frac{v}{u} \right)^c \right]^2 dv^2. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (10).

TROISIÈME CAS : $m = 0, c = 0$. — On a simplement

$$dy = h \frac{dx}{x}, \quad \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} = 0.$$

L'intégration donne, avec trois constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} U &= \log A u^h, & V &= \log B v^h, & Wv &= C; \\ ds^2 &= du^2 + \frac{C}{h} \frac{u}{v} \left(\log \frac{A u^h}{B v^h} \right)^2 dv^2. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (11).

3. En conséquence, tout élément linéaire de spirale à lignes

d'égale courbure parallèles, quand on rapporte la surface à ces lignes et aux géodésiques orthogonales, prend l'une des deux formes

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[A \left(\frac{u}{v} \right)^n + B \left(\frac{v}{u} \right)^n \right]^2 dv^2,$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left(A \log \frac{u}{v} + B \right)^2 dv^2.$$

Ces deux types, dont le second peut être considéré comme une dégénérescence du premier, contiennent la solution complète du problème que nous nous étions proposé. Il suffit de supposer dans le premier $AB = 0$ pour retrouver l'élément linéaire primitivement obtenu, qui convient à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

6. On peut arriver aux résultats qui précèdent en continuant les transformations commencées au n° 1. A cet effet, reprenons l'élément linéaire (1)', qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 (2m\Lambda' - 1) dv^2,$$

moeynnant le changement de variable

$$(6) \quad \frac{m\Lambda' dx}{\sqrt{2m\Lambda' - 1}} = V_0(v) dv = \frac{du}{u},$$

où Λ désigne la fonction de x définie par la relation (5).

Si nous représentons par dr le second membre de l'équation (6), Λ sera une fonction de r et nous pourrons poser

$$(12) \quad \frac{\Lambda''}{\Lambda} - \Lambda = R(r).$$

Mais, en vertu de l'équation (5), il vient

$$R^2 = 2m\Lambda' - 1, \quad \Lambda' = \frac{R^2 + 1}{2m},$$

d'où, substituant dans la relation (6),

$$(6)' \quad \frac{R^2 + 1}{2R} dx = dr.$$

Or, en prenant la différentielle logarithmique de Λ' , nous trouvons

$$\frac{\Lambda''}{\Lambda'} dx = \frac{2R}{R^2 + 1} R' dr,$$

ce qui, en tenant compte de (6)', revient à

$$(13) \quad \frac{A''}{A'} = R';$$

d'où, par comparaison avec (12),

$$(14) \quad A = R' - R.$$

Différentions encore, en ayant égard à l'équation (6)'; nous arrivons facilement à la relation

$$(15) \quad m(R'' - R') - R = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, dont l'intégration donne R. Une fois cette fonction connue, l'élément linéaire, qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 R^2 dv^2,$$

ne dépend plus que de la fonction V_0 . Nous allons déterminer cette fonction de manière que le coefficient de dv^2 soit une fonction homogène et de degré zéro de u et de v .

Ce coefficient étant égal à $u^2 V_0^2 (2m A' - 1)$, nous devons satisfaire à l'identité

$$u \frac{\partial}{\partial u} [u^2 V_0^2 (2m A' - 1)] + v \frac{\partial}{\partial v} [u^2 V_0^2 (2m A' - 1)] = 0.$$

Mais de l'équation (6), qui définit x comme fonction de u et de v , nous tirons

$$\frac{m A'}{\sqrt{2m A' - 1}} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{u}, \quad \frac{m A'}{\sqrt{2m A' - 1}} \frac{\partial x}{\partial v} = V_0.$$

Si l'on substitue ces expressions des dérivées de x dans l'identité proposée, il vient, tous calculs faits,

$$\sqrt{2m A' - 1} (V_0 v)' + \frac{A''}{A'} V_0 (V_0 v - 1) = 0.$$

7. Cette équation admet, quelle que soit la fonction A, la solution évidente $V_0 v = 1$, que nous avons déjà rencontrée. Elle n'en peut d'ailleurs admettre d'autres que celles-ci

$$\frac{-(V_0 v)'}{V_0 (V_0 v - 1)} = \frac{A''}{A' \sqrt{2m A' - 1}} = \text{const.} = n + 1.$$

Cherchons avant tout à déterminer la fonction V_0 ; nous avons

$$\frac{(V_0 v)'}{V_0 v(V_0 v - 1)} + \frac{n+1}{v} = 0,$$

d'où, intégrant et résolvant,

$$(16) \quad V_0 = \frac{v^n}{v^{n+1} - h}, \quad (h = \text{const.}).$$

L'équation (6) donne alors

$$(17) \quad r = \int V_0 dv - \log u = \log \frac{k}{u} (v^{n+1} - h)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (k = \text{const.}).$$

Quant à la fonction R , nous l'obtiendrons en rapprochant les deux équations que doit vérifier la fonction A , savoir l'équation (5) et celle qui vient d'être obtenue

$$\sqrt{2m A' - 1} = \frac{A''}{A'} - A, \quad \frac{A''}{A' \sqrt{2m A' - 1}} = n + 1.$$

En multipliant membre à membre, on trouve

$$(18) \quad n \left(\frac{A''}{A'} - A \right) = A = n R,$$

à cause de l'équation (12). Mais en vertu de l'équation (13), ceci peut encore s'écrire

$$R' - n R = R, \quad \frac{R'}{R} = n + 1;$$

d'où, en intégrant et désignant par g une constante arbitraire,

$$R = g e^{(n+1)r}.$$

D'après l'expression (17), trouvée pour r , nous aurons

$$R = g^{n+1} \frac{v^{n+1} - h}{u^{n+1}};$$

d'où, substituant R et V_0 dans l'élément linéaire et désignant par C une constante arbitraire,

$$(e)' \quad ds^2 = du^2 + C \left(\frac{v}{u} \right)^{2n} dv^2.$$

On voit que cet élément linéaire convient à des surfaces de révolution en même temps qu'à des spirales. La fonction A doit satisfaire aux deux équations

$$(18) \quad nA'' - (n+1)AA' = 0,$$

$$(5) \quad \left(\frac{A''}{A'} - A \right)^2 = 2mA' - 1,$$

dont la combinaison donne successivement

$$n^2(2mA' - 1) - A^2 = 0, \quad mn^2A'' - AA' = 0,$$

en sorte que m doit être égal à l'inverse de $n(n+1)$. Dès lors les deux équations (5) et (18) se réduisent à une seule

$$nA'' - (n+1)AA' = 0,$$

qui, par deux intégrations successives, donne facilement

$$A = n \tanh \frac{n+1}{2} (x - x_0).$$

C'est, aux notations près, le résultat que nous avons trouvé précédemment (*loc. cit.*).

8. Revenons maintenant à l'hypothèse $V_0 v = 1$, qui laisse à la fonction A toute sa généralité. On en déduit

$$r = \int V_0 dv - \log u = \int \frac{dv}{v} - \log u = \log \frac{u}{v}.$$

L'élément linéaire devient

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} R^2 dv^2.$$

Il suffit donc, pour le connaître entièrement, de déterminer la fonction R de r que définit l'équation (15). Pour simplifier les notations dans ce qui suivra, nous écrirons

$$(15)' \quad R'' - R' - n(n-1)R = 0, \quad m = \frac{1}{n(n-1)}.$$

De la sorte, l'équation caractéristique sera

$$t(t-1) = n(n-1),$$

et admettra pour racines n et $1-n$. Nous avons donc à distinguer deux cas, suivant que ces racines sont inégales ou égales.

PREMIER CAS : $2n - 1 \neq 0$. — Les racines de l'équation caractéristique étant inégales, l'équation (15)' a pour intégrale générale

$$R = C e^{nr} + D e^{(1-n)r},$$

C et D étant deux constantes arbitraires; d'où, en remplaçant r par son expression,

$$R = C \left(\frac{v}{u} \right)^n + D \left(\frac{v}{u} \right)^{1-n}.$$

L'élément linéaire devient alors

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left[C \left(\frac{v}{u} \right)^{n-\frac{1}{2}} + D \left(\frac{u}{v} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right]^2 dv^2;$$

c'est, aux notations près, la formule (10). L'hypothèse $CD = 0$ donne l'élément linéaire $(e)'$ trouvé d'abord.

SECOND CAS : $2n - 1 = 0$. — L'équation (15)' a pour intégrale

$$R = (Cr + D)e^{\frac{r}{v}};$$

d'où, en ayant égard à l'expression de r ,

$$R = \sqrt{\frac{v}{u}} \left(C \log \frac{v}{u} + D \right).$$

L'élément linéaire se réduit alors à

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v} \left(C \log \frac{v}{u} + D \right)^2 dv^2.$$

C'est, aux notations près, la formule (11). Nous retrouvons ainsi les conclusions du n° 3.

Sur les polygones inscrits dans les coniques;

par M. Félix Lucas.

Le nombre de points nécessaire et suffisant pour déterminer une courbe algébrique du degré p est $\frac{p(p+3)}{2}$. Les p^2 points d'intersection de deux courbes du degré p forment les pivots d'une courbe mobile, du même degré, que l'on peut faire passer par un point quelconque du plan; si p est supérieur à 2, les p^2 pivots ne sont pas tous arbitraires. Il suffit de donner

$$\frac{p(p+3)}{2} - 1 = \frac{p^2 + 3p - 2}{2}$$

d'entre eux pour déterminer les $\frac{p^2 + 3p - 2}{2}$ autres.

Cela posé, considérons un polygone de $2p$ côtés ($p > 2$), inscrit dans une conique. Le système des p côtés de rang impair et celui des p côtés de rang pair forment deux courbes du degré p . Ces courbes se coupent en p^2 points ou pivots, comprenant les $2p$ sommets situés sur la conique donnée, et $p(p-2)$ autres points.

Pour déterminer ces p^2 pivots, il suffit d'en donner $\frac{p^2 + 3p - 2}{2}$, soit les $2p$ sommets du polygone avec $\frac{p^2 + 3p - 2}{2}$ autres pivots. Ce dernier nombre, qui peut aussi s'écrire $\frac{(p-2)(p+1)}{2}$, est exactement égal au nombre des points qui déterminent une courbe du degré $(p-2)$. Cette courbe et la conique donnée constituent ensemble une pivotante du degré p qui doit passer par les $\frac{p^2 + 3p - 2}{2}$ pivots restants. Par conséquent :

Lorsqu'un polygone de $2p$ côtés est inscrit dans une conique, ses côtés de rang impair coupent ses côtés de rang pair en $p(p-2)$ points, qui appartiennent à une courbe du degré $(p-2)$.

En faisant $p = 3$, on obtient le théorème de Pascal relatif à

l'hexagone inscrit. Les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

En faisant $p = 4$, on obtient le théorème suivant :

Les huit côtés d'un octogone inscrit dans une conique forment un octogone inscrit dans une autre conique.

Si le premier octogone est convexe, le second octogone est étoilé. Les côtés successifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de l'un des octogones prennent, dans l'autre octogone, les rangs 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6.

En faisant $p = 5$, on obtient le théorème suivant :

Les côtés de rang impair d'un décagone inscrit dans une conique coupent ses côtés de rang pair en quinze points situés sur une courbe du troisième degré.

En faisant $p = 6$, on voit que :

Les côtés de rang impair d'un dodécagone inscrit dans une conique coupent ses côtés de rang pair en vingt-quatre points situés sur une courbe du quatrième degré.

En supposant que les côtés de rang pair d'un polygone de $2p$ côtés inscrit dans une conique deviennent infiniment petits, on obtient le théorème suivant :

Lorsqu'un polygone de p côtés est inscrit dans une conique, les tangentes à la conique, menées par les sommets de ce polygone, coupent ses côtés en $p(p - 2)$ points, qui appartiennent à une courbe du degré $(p - 2)$.

Le triangle inscrit donne ainsi trois points en ligne droite ; le quadrilatère inscrit donne huit points situés sur une conique ; le pentagone inscrit donne quinze points sur une cubique ; l'hexagone inscrit donne vingt-quatre points sur une quartique, etc.

En transformant les figures par la méthode des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes corrélatifs concernant les polygones circonscrits aux coniques.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1892.

PRÉSIDENTE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur les courbures des surfaces polaires réciproques et des surfaces inverses.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. d'Ocagne : *Sur les normales menées d'un point à une parabole.*

M. Fouret : *Sur un mode de génération des lignes asymptotiques de la surface de Steiner.*

M. Bioche : *Sur les surfaces réglées qui se transforment homographiquement en elles-mêmes.*

M. Raffy : *Sur le problème général de la déformation des surfaces et sur certains cas particuliers.*

SÉANCE DU 20 AVRIL 1892.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Communications :

M. d'Ocagne : *Construction de la parabole déterminée par un point, le centre de courbure en ce point, et la direction de l'axe.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. Bioche montre que, étant donnée une cubique gauche dont les trois directions asymptotiques sont rectangulaires, si on la coupe par des plans parallèles, le lieu des points de rencontre des hauteurs des triangles ainsi déterminés est la corde perpendiculaire à la direction des plans.

M. FOURET fait la Communication suivante :

Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique.

1. Dans les traités d'Algèbre, on restreint généralement la por-

tée pratique de la règle de Newton, qui donne une limite supérieure des racines d'une équation, en s'imposant de trouver pour cette limite un nombre positif. Cette règle, dans la plus grande généralité qu'elle comporte, doit s'énoncer ainsi :

I. *Toute valeur de x , positive ou négative, dont la substitution dans $F(x)$ et dans ses dérivées donne des résultats de même signe, est une limite supérieure des racines de l'équation $F(x) = 0$.*

Supposons que l'on trouve une valeur négative $-l$ de x satisfaisant à ces conditions. On en tirera cette double conclusion : 1° que l'équation n'a pas de racine positive; 2° qu'elle ne peut avoir de racine négative supérieure à $-l$.

La règle de Newton se complète par la suivante, que nous avons démontrée dans une précédente Communication (1) :

II. *Toute valeur de x , positive ou négative, dont la substitution dans $F(x)$ et ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de $F(x) = 0$.*

Quand on trouvera une valeur positive k de x , satisfaisant à ces conditions, on en conclura : 1° que l'équation n'a pas de racine négative; 2° qu'elle ne peut avoir de racine positive inférieure à k .

Pour résoudre une équation numérique, il y aura généralement avantage à lui appliquer tout d'abord ces deux règles. Ce n'est qu'ensuite que l'on devra subsidiairement, et s'il y a lieu, déterminer une limite inférieure des racines positives et une limite supérieure des racines négatives, en se servant des transformées en $\frac{1}{x}$ et en $-\frac{1}{x}$ de l'équation proposée.

2. On peut remarquer que l'application de la règle II équivaut à l'application de la règle I à la transformée en $-x$.

Posons, en effet,

$$G(x) = F(-x).$$

(1) Même Tome, p. 4.

racines de l'équation (1), lorsqu'elle fait prendre des valeurs alternativement positives et négatives aux polynômes de la suite (2).

En effet, posons $F(-x) \equiv G(x)$. La quantité $-\lambda$ sera une limite inférieure des racines de l'équation (1), si λ est une limite supérieure des racines de $G(x) = 0$, c'est-à-dire donne, étant substituée à x , des valeurs de même signe aux polynômes $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_{m-1}(x)$, $G_m(x)$, déduits les uns des autres d'après la loi qui a servi à former les polynômes de la suite (2). Mais on voit immédiatement que l'on a

$$G_1(x) \equiv -F_1(-x), \quad G_2(x) \equiv F_2(-x), \quad G_3(x) \equiv -F_3(-x), \quad \dots$$

Donc, si $x = \lambda$ fait prendre des valeurs de même signe à $G(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $x = -\lambda$ donnera des valeurs alternativement positives et négatives à $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., et $-\lambda$ sera bien une limite inférieure des racines de $F(x) = 0$.

SÉANCE DU 4 MAI 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Hermann : *Sur un nouveau procédé de Cryptographie.*

M. Raffy : *Sur certaines surfaces applicables les unes sur les autres et dépendant d'une fonction arbitraire.*

M. Demoulin : *Sur une propriété des courbes tétraédrales.*

M. FOURET fait la Communication suivante :

Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate.

Parmi les propriétés qui caractérisent la lemniscate de Bernoulli, on remarque la suivante : c'est la courbe sur laquelle doit se mouvoir un point pesant, dans un plan vertical, pour décrire, sans vitesse initiale, à partir d'un point fixe, un arc quelconque dans l'intervalle de temps qu'il lui faudrait pour parcourir, en partant du repos, la corde sous-tendant cet arc.

C'est à tort que la découverte de cet intéressant théorème est attribuée tantôt à Fuss, tantôt à Saladini. En réalité, l'origine en remonte plus haut, ainsi que nous avons eu l'occasion de le reconnaître dernièrement. La recherche d'une courbe satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer est, en effet, traitée analytiquement pages 166 et 167 du tome II de la *Mécanique d'Euler* ⁽¹⁾, publiée en 1736. Saladini, sans citer Euler, donne une solution qui diffère peu de la sienne (*Memorie del Istituto nazionale italiano*, t. I, année 1804). Quant à Fuss, qui ne fait aucune allusion à ces précédents, sa solution basée sur des considérations ingénieuses, généralisées depuis ⁽²⁾, a du moins le mérite d'une plus grande simplicité (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, t. IX, année 1815). Il y a lieu toutefois d'être surpris que Fuss qui fut, comme on le sait, le disciple et le commentateur d'Euler, ait ignoré ou ait sciemment omis de mentionner l'antériorité de ce dernier.

Pour compléter ce petit historique, nous rappellerons que M. Ossian Bonnet, en 1844, a repris et généralisé la question en démontrant que la lemniscate jouit encore de la propriété indiquée plus haut, lorsque le mobile est sollicité par une force dirigée vers un point fixe et proportionnelle à sa distance à ce point fixe (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, p. 116). Il était alors naturel de se proposer de trouver la loi la plus générale à laquelle il faut soumettre la force agissant sur un mobile, pour faire décrire à celui-ci une lemniscate dans les conditions susénoncées. Nous avons résolu la question (*Journal de l'École Polytechnique*, LVI^e cahier, p. 171-211, année 1886), en donnant l'expression générale, qui dépend d'une fonction arbitraire, du potentiel dont doit dériver la force. De cette expression on conclut, en particulier, que la seule force centrale, répondant aux conditions du problème, est celle qui est proportionnelle à la distance du mobile au centre fixe : c'est le cas traité par M. Bonnet.

(1) Il y a lieu de remarquer que l'auteur ne donne pas le nom de *lemniscate* à la courbe qu'il obtient et dont il trouve cependant bien l'équation connue en coordonnées cartésiennes.

(2) Voir une Note de M. Rispal (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XXI, p. 225-230, année 1877) et deux Notes de M. Durrande (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, année 1874, p. 1550 et 1607).

SÉANCE DU 18 MAI 1892.

PRÉSIDENCE DE M. DE PRESLE.

Communications :

M. Demoulin : *Détermination explicite des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral.*

M. Raffy : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. Lery : *Sur un problème d'Analyse indéterminée.*

M. Félix Lucas revient sur un théorème relatif aux *intersections de trois quadriques*, qu'il a fait connaître à la séance du 18 juin 1890, et qui a été publié au t. XIX du *Bulletin* (p. 118). Il fait observer que cette proposition rentre dans une série de théorèmes que M. Picquet a démontrés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1865 (2^e série, t. IV, p. 71 et suiv.).

M. Schlegel adresse un Mémoire intitulé : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions.*

M. CATALAN adresse la Note suivante :

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.

[Addition (1)].

VI. — *Autres séries elliptiques.*

13. Soit encore la formule de Cauchy

$$(1) \quad (1+x)(1+tx)\dots(1+t^{n-1}x) = 1 + T_{n,1}x + \dots + T_{n,p}x^p + \dots + T_{n,n}x^n,$$

dans laquelle

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\dots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^p)} t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on divise les deux membres par $1+x$, on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+tx)(1+tx^2)\dots(1+t^{n-1})x \\ = 1 + T_{n,1} \left| \begin{array}{l} x + T_{n,2} \\ - T_{n,1} \\ + 1 \end{array} \right| x^2 + \dots + T_{n,n} x^{n-1}; \end{array} \right.$$

(1) Voir le *Bulletin*, t. XIX, p. 124 et 145.

14. *Remarque.* — L'égalité (24) est la même chose que

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x) \dots \\ & = 1 + \frac{q}{1-q}x + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Au lieu de celle-ci, Jacobi a trouvé (1)

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & (1+qx)(1+q^3x)(1+q^5x) \dots \\ & = 1 + \frac{q}{1-q^2}x + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}x^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Donc, en faisant $x = \pm 1$:

$$(31) \quad \beta = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots,$$

$$(32) \quad \alpha = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

Ces deux formules ont été données précédemment (2). En outre, la première est déjà ancienne (3).

VII. — *Autres théorèmes d'Arithmétique.*

15. Dans l'égalité (26) :

la fraction

$$\frac{q}{1-q} = q \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 1) q^n;$$

la fraction

$$\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} = q^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 2) q^n;$$

la fraction

$$\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = q^6 \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 3) q^n;$$

etc. (4).

Si le second membre est développé sous la forme

$$1 + \Lambda_1 q + \Lambda_2 q^2 + \Lambda_3 q^3 + \Lambda_4 q^4 + \dots,$$

(1) *Fundamenta*, p. 180.

(2) *Bulletin*, t. XIX, p. 148, 149.

(3) *Recherches*..., p. 52.

(4) *Recherches*..., p. 17. $F(n, p)$ représente le nombre de décompositions de n , en parties, égales ou inégales, non supérieures à p . On suppose $F(0, p) = 1$.

il doit être identique avec

$$1 - q - q^2 + q^3 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \dots$$

Conséquentment ⁽¹⁾ :

$$A_1 = -F(0, 1) = -1,$$

$$A_2 = -F(1, 1) = -1,$$

$$A_3 = -F(2, 1) + F(0, 2) = -1 + 1 = 0,$$

$$A_4 = -F(3, 1) + F(1, 2) = -1 + 1 = 0,$$

$$A_5 = -F(4, 1) + F(2, 2) = -1 + 2 = +1,$$

etc.; puis ce théorème :

La quantité

$$-F(n-1, 1) + F(n-3, 2) - F(n-6, 3) + F(n-10, 4) - \dots$$

nulle si n n'est pas pentagonal, égale ± 1 dans les autres cas.

16. L'égalité (25) conduit à un théorème qui a de l'analogie avec celui-ci ⁽²⁾.

Liège, septembre 1891.

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1892.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques.*

M. Bioche : *Sur un problème relatif à l'ellipse.*

M. d'Ocagne : *Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane.*

M. DEMOULIN fait la Communication suivante :

*Quelques remarques relatives à la théorie
des courbes gauches.*

1. Nous rappellerons tout d'abord quelques résultats bien connus concernant la cinématique des systèmes invariables.

⁽¹⁾ *Recherches*..., p. 61, Table V.

⁽²⁾ *Recherches*..., p. 48.

Considérons le trièdre trirectangle $Oxyz$. Le mouvement le plus général de ce trièdre peut être réalisé par le déplacement du point O accompagné d'une rotation ω autour d'un axe passant par ce point. Soient ξ, η, ζ les projections, sur les axes Ox, Oy, Oz , de la vitesse du point O et p, q, r les projections, sur les mêmes axes, du vecteur qui représente la rotation ω en grandeur, direction et sens. Les équations de l'axe hélicoïdal correspondant au déplacement infiniment petit du trièdre $Oxyz$ sont

$$(1) \quad \frac{qz - ry + \xi}{p} = \frac{rx - pz + \eta}{q} = \frac{py - qx + \zeta}{r} = \frac{V}{\omega},$$

V désignant la vitesse commune aux différents points de l'axe hélicoïdal.

2. Soient Ox, Oy, Oz respectivement la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche (Γ) .

Cherchons l'axe hélicoïdal relatif au mouvement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites.

Si l'on suppose la vitesse du point O constante et égale à l'unité, on a ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \xi &= 1, & \eta &= 0, & \zeta &= 0, \\ p &= -\frac{1}{\rho}, & q &= 0, & r &= \frac{1}{\sigma}, \end{aligned}$$

ρ et σ désignant respectivement le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Γ) au point O .

Les équations (1) deviennent dès lors

$$(2) \quad -\frac{ry + 1}{p} = \frac{rx - pz}{q} = \frac{py}{r} = \frac{V}{\omega}.$$

On peut les mettre sous la forme

$$(3) \quad \frac{\xi}{x} = \frac{r}{p} = -\frac{\tau}{\rho},$$

$$(4) \quad \gamma = \frac{r}{p^2 + r^2} = \frac{\rho^2 \tau^2}{\rho^2 + \tau^2}.$$

L'axe hélicoïdal instantané coupe donc, à angle droit, la nor-

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 9 et 10.

male principale Oy en un point distant de l'origine O de la longueur

$$(5) \quad l = \frac{\varphi \tau^2}{\varphi^2 + \tau^2};$$

l'angle θ qu'il fait avec la tangente Ox est donné par la formule

$$(6) \quad \text{tang} \theta = \frac{r}{p} = -\frac{\tau}{\varphi}.$$

3. Supposons que la courbe (Γ) possède une torsion constante $\frac{1}{\tau_0}$ et cherchons l'équation, par rapport au trièdre mobile, de la surface lieu des axes hélicoïdaux instantanés relatifs aux différents points de la courbe.

On a, en vertu des équations (3) et (4),

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= -\frac{\tau_0}{\varphi}, \\ y &= \frac{\varphi \tau_0^2}{\varphi^2 + \tau_0^2}. \end{aligned}$$

Éliminant φ entre ces deux équations, on trouve

$$y(z^2 + x^2) + \tau_0 x z = 0.$$

On reconnaît là le cône de Plücker. On a donc ce théorème :

Lors du déplacement du trièdre principal relatif à une courbe à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit, par rapport à ce trièdre, un cône de Plücker.

4. Revenant au cas d'une courbe gauche quelconque, cherchons les expressions de la courbure et de la torsion en fonction de l et du rapport $\frac{V}{\omega}$ que, pour la simplicité, nous désignerons par k .

En éliminant φ entre les égalités (5) et (6), on trouve

$$(7) \quad l = -\tau \sin \theta \cos \theta,$$

et, en éliminant τ ,

$$(8) \quad l = \varphi \sin^2 \theta.$$

Exprimons maintenant θ en fonction des quantités l et k .

L'une des égalités (2) donne

$$\frac{\rho l}{r} = \frac{V}{\omega} = k,$$

ou

$$(9) \quad l = -\frac{k\tau}{\rho}.$$

Cette dernière égalité, jointe à (6), montre que

$$l = k \tan \theta.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{k^2}{l^2}.$$

La formule (8) devient donc

$$(10) \quad \rho = \frac{l}{\sin^2 \theta} = l + \frac{k^2}{l}.$$

Mais, en vertu de (9),

$$-\tau = \frac{\rho l}{k};$$

par suite, en tenant compte de (10),

$$(11) \quad -\tau = k + \frac{l^2}{k}.$$

On voit donc que l'on peut déduire l'expression de $-\tau$ de celle de ρ en changeant l en k et k en l .

SÉANCE DU 13 JUIN 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections : Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. le général Frolov, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Vicaire; M. Gabriel Arnoux et M. Élie Perrin, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable défini sur une Carte par des recoupements non convergents.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante.

1. Commençons par rappeler les formules de Codazzi :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A q_1 + C p = 0, \\ C r + A'_v = 0, \\ A r_1 - C'_u = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1. \end{array} \right. \quad (2)$$

Transformons-les maintenant en y introduisant la courbure moyenne h et la courbure totale g . On a, comme on sait,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2h = \frac{p_1}{C} - \frac{q}{A}, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = g = \frac{p q_1 - q p_1}{AC}.$$

La première de ces formules et la première du groupe (1) sont vérifiées si l'on pose

$$\frac{p_1}{C} = \mu + h, \quad \frac{q}{A} = \mu - h, \quad -\frac{q_1}{C} = \frac{p}{A} = m,$$

quelles que soient les deux indéterminées μ et m . Portant ces valeurs de p , q , p_1 , q_1 dans l'expression de g , nous trouvons

$$\mu^2 + m^2 = h^2 - g.$$

En dernier lieu, faisons

$$S^2 = h^2 - g, \quad \mu = S \sin \tau, \quad m = S \cos \tau;$$

nous avons ainsi exprimé p , q , p_1 , q_1 au moyen de h , de l'angle auxiliaire τ et des coefficients de l'élément linéaire qui est supposé connu :

$$\begin{array}{ll} p_1 = C(S \sin \tau + h), & -q_1 = CS \cos \tau, \\ q = A(S \sin \tau - h), & p = AS \cos \tau. \end{array}$$

Substituons dans les deux premières équations du groupe (2),

puis résolvons par rapport aux dérivées de τ ; il viendra

$$(3) \quad -\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\Lambda}{G} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\sin \tau}{S} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\cos \tau}{S} - \frac{\Lambda}{G} \frac{\partial}{\partial v} \log \Lambda^2 S,$$

$$(4) \quad -\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{G}{\Lambda} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\sin \tau}{S} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\cos \tau}{S} + \frac{G}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial u} \log G^2 S.$$

On voit par là que la courbure moyenne h satisfait à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre. En effet, en égalant les deux expressions de τ''_{uv} et tenant compte des formules (3) et (4), on a pour τ une équation linéaire où figurent les dérivées secondes de h . En la différentiant par rapport à u et v , on forme deux équations qui, jointes à la précédente et aux équations (3) et (4), donneront, par l'élimination de τ , de τ'_u et de τ'_v , deux équations du troisième ordre pour la fonction h .

2. Le système (3) et (4) se prête à bien des applications. Nous n'insisterons que sur celles qui concernent les surfaces à courbure moyenne constante. Une pareille surface étant rapportée à une famille d'isothermes, nous ferons $\Lambda^2 = G^2 = \lambda$ avec $h = \text{const.}$ Il vient alors simplement

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \sqrt{h^2 - g}, \quad -\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \sqrt{h^2 - g},$$

d'où résulte la condition d'intégrabilité

$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \lambda \sqrt{h^2 - g} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \lambda \sqrt{h^2 - g} = 0.$$

Cette condition étant vérifiée, τ ne sera déterminé qu'à une constante près, ce qui démontre un théorème de M. O. Bonnet : *Étant donnée une surface à courbure moyenne constante, il en existe une infinité d'autres ayant même courbure moyenne qu'elle et applicables sur elle.*

3. L'équation (5) exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

soit applicable sur une surface à courbure moyenne constante h , il suffira d'y introduire exclusivement des paramètres différentiels

invariants pour qu'elle soit valable dans tout système de coordonnées. Or cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right] + \frac{2}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \right] = 0,$$

ou, d'après la définition du paramètre Δ_2 ,

$$\Delta_2 \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) + 2 \Delta_2 \log \lambda = 0.$$

Il n'y a plus qu'à se rappeler la formule qui donne la courbure totale pour trouver

$$\Delta_2 \log \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right) - \frac{4}{R_1 R_2} = 0.$$

Telle est, exprimée au moyen d'invariants seulement, la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'un élément linéaire, *donné sous une forme quelconque*, convienne à des surfaces à courbure moyenne constante h (à des surfaces minima si h est nul).

Il en résulte que cet élément est réductible à la forme

$$ds^2 = \left(h^2 - \frac{1}{R_1 R_2} \right)^{-\frac{1}{2}} (du^2 + dv^2).$$

Remarque. — L'angle τ est le double de l'angle que fait l'une des lignes de courbure avec l'une des lignes coordonnées.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane; par M. M. D'OCAGNE.

1. Je rappellerai que j'ai mis en évidence, dans un précédent Mémoire ⁽¹⁾, le rôle que joue, dans l'étude infinitésimale des courbes planes, une courbe adjointe que je désigne par la lettre n , et qui est ainsi définie :

Étant donnée une courbe plane c , on prend arbitrairement deux pôles O et P. On joint le pôle O à un point M pris sur c

⁽¹⁾ Publié en 1888 à la fois dans l'*American Journal of Mathematics* et dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, de Lisbonne.

et par P on mène une parallèle à la normale en M à la courbe c; les deux droites ainsi menées se coupent en un point H dont le lieu est la courbe adjointe n.

Cette courbe adjointe passe par les pieds des normales menées du point P à la courbe c; ses asymptotes sont parallèles aux normales menées du point O; elle passe par les points de rencontre du cercle décrit sur OP comme diamètre, d'une part, avec les tangentes menées de O à la courbe c; d'autre part, avec les parallèles aux asymptotes de cette courbe menées par le même point.

Lorsque la courbe c est une conique de centre O, l'adjointe n n'est autre que l'hyperbole équilatère passant par les pieds des quatre normales à la conique issues du point P. Si le point P est sur un des axes de cette conique, l'adjointe n se réduit à une perpendiculaire à cet axe.

J'ai d'ailleurs, dans mon Mémoire cité, fait connaître toutes les courbes admettant une droite pour adjointe n.

L'adjointe n permet de construire la normale en tout point de la courbe c et aussi de trouver les points de cette courbe où la normale a une direction donnée.

J'ai fait voir qu'elle permettait en outre d'obtenir très simplement le centre de courbure en tout point de la courbe c, et cela de la manière suivante :

Par le point M' où la normale en M à la courbe c coupe la droite OP, que l'on élève à cette normale une perpendiculaire coupant OM en L. La parallèle menée par L à la tangente en H à l'adjointe n passe par le centre de courbure Ω répondant au point M.

On déduit de là que les points d'inflexion de la courbe c se trouvent sur les droites joignant le point O aux points de contact des tangentes menées de P à l'adjointe n.

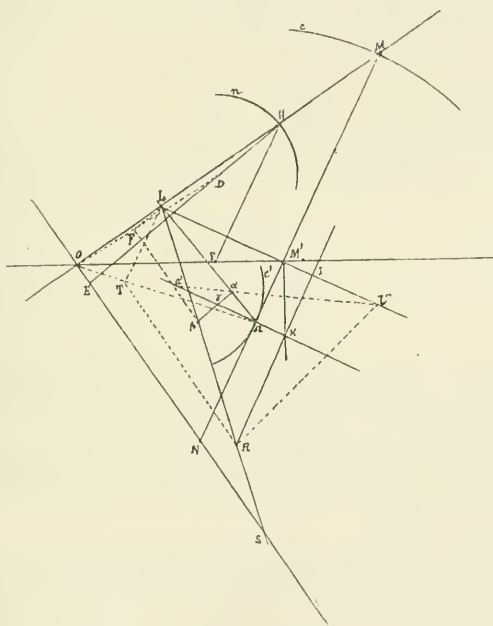
Le résumé qui précède fait ressortir l'intérêt qui s'attache à la considération de l'adjointe n. On voit que les éléments de cette courbe, dépendant d'infiniment petits d'un certain ordre, permettent d'obtenir les éléments de la courbe c dépendant d'infiniment petits de l'ordre immédiatement supérieur.

On est donc tout naturellement amené à rechercher comment la connaissance du centre de courbure de l'adjointe n entraîne celle du centre de courbure de la développée de la courbe c . C'est ce que je vais examiner ici.

2. Afin de permettre au lecteur de mieux suivre la solution qui va être donnée, je commencerai par en résumer la marche de la manière suivante :

Le centre de courbure Ω étant construit comme il a été dit plus

Fig. 1.



haut, nous allons déterminer successivement, en les déduisant les uns des autres (*fig. 1*) :

- 1° Le point où la droite LM' touche son enveloppe;
- 2° La normale au lieu décrit par le point L ;
- 3° Le point où la droite $L\Omega$ touche son enveloppe;
- 4° Le centre de courbure de la courbe que décrit le point Ω , c'est-à-dire de la développée c' de la courbe c .

3. *Point où la limite LM' touche son enveloppe.* — L'angle

LM'M étant constamment droit, on a le point I où LM' touche son enveloppe en abaissant sur cette droite une perpendiculaire du point K où se rencontrent la normale à l'enveloppe de MM' et la normale au lieu décrit par le point M', c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en Ω à MM', et la perpendiculaire élevée en M' à OP.

4. *Normale au lieu décrit par le point L.* — Soit LRS la normale cherchée, qui coupe en S la perpendiculaire élevée en O à LM et en R la normale KI à l'enveloppe de LM'. Si $d(L)$, $d(M)$, $d(M')$ sont les différentielles des arcs de courbes décrits simultanément par les points L, M, M', on a

$$\frac{d(L)}{d(M)} = \frac{LS}{MN}, \quad \frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\Omega}{M'K}, \quad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on obtient

$$1 = \frac{LS \times M\Omega}{MN \times LR}$$

ou

$$\frac{LS}{LR} = \frac{MN}{M\Omega}.$$

On déduit de là que si la droite O Ω coupe au point T la parallèle à MN menée par le point L, le point R se trouve sur la parallèle à ON menée par le point T; ce point R étant en même temps sur la droite KI précédemment obtenue, la normale LR est complètement déterminée.

5. *Point où la droite L Ω touche son enveloppe.* — Si la normale à la courbe u au point H coupe en E la perpendiculaire ON à OH, on a

$$\frac{d(L)}{d(H)} = \frac{LS}{HE}.$$

Mais, si ε est l'angle de contingence de la courbe u au point H et D le centre de courbure correspondant, la différentielle $d(H)$ de l'arc a pour expression

$$d(H) = HD \times \varepsilon.$$

Soit z le point cherché. La normale en ce point à l'enveloppe de L Ω , c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en ce point à L Ω , cou-

pant en β la normale LR à la courbe décrite par le point L , on a de même, en remarquant que le parallélisme de $L\Omega$ et de la tangente en H à la courbe n entraîne la même valeur ε pour l'angle de contingence au point z ,

$$d(L) = L\beta \times \varepsilon.$$

Il vient, par suite,

$$\frac{L\beta}{HD} = \frac{LS}{HE},$$

égalité qui montre que la parallèle à HE menée par L et la parallèle à ON menée par β se coupent en un point F situé sur OD . De là, la construction du point β . On n'a plus, de ce point, qu'à abaisser sur $L\Omega$ la perpendiculaire βz pour avoir le point z cherché.

6. *Centre de courbure Ω' de la développée c' .* — Si γ est le point où la normale $\alpha\beta$ à l'enveloppe de $L\Omega$ coupe la normale ΩK à la développée c' , on a

$$\frac{d(L)}{d(\Omega)} = \frac{L\beta}{\Omega\gamma}, \quad \frac{d(\Omega)}{d(M')} = \frac{\Omega\Omega'}{M'K}, \quad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR}.$$

Par multiplication, on tire de là

$$1 = \frac{L\beta \times \Omega\Omega'}{\Omega\gamma \times LR},$$

ou

$$\frac{\Omega\Omega'}{\Omega\gamma} = \frac{LR}{L\beta}.$$

On déduit de cette égalité que si la parallèle à $\alpha\beta$ (perpendiculaire à $L\Omega$) menée par le point R coupe LM' au point U , le centre de courbure cherché Ω' se trouve sur la droite zU . Comme il est d'ailleurs sur la normale ΩK , sa détermination est complète.

Le problème posé se trouve ainsi résolu.

7. *Simplification pour le cas où l'adjointe n est une droite.*

— Si l'adjointe n est une droite, rien n'est modifié à la construction du point R . De même, la droite RU est toujours perpendiculaire à $L\Omega$; mais il devient inutile d'effectuer une construction pour avoir le point z où $L\Omega$ touche son enveloppe. En effet, la droite $L\Omega$ étant parallèle à la tangente en H à la courbe n , et celle-

menant par le point L où elle rencontre HM la parallèle LΩ à la tangente HT à l'adjointe *n*.

Ici encore *le point I où LM' touche son enveloppe* s'obtient en abaissant sur cette droite une perpendiculaire du point K où se rencontrent les perpendiculaires élevées respectivement à PM' en M' et à ΩM en Ω.

Pour avoir *la normale au lieu décrit par le point L*, remarquons que la deuxième et la troisième des égalités du n° 4 subsistent telles quelles, savoir :

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\Omega}{M'K}, \quad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR};$$

mais que la première doit être remplacée par la suivante :

$$\frac{d(L)}{d(M)} = \frac{LT}{MT},$$

T étant le point de rencontre des tangentes aux courbes décrites respectivement par les points L et T. Dès lors, on obtient par multiplication

$$\frac{LT}{MT} = \frac{LR}{M\Omega}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$M\Omega \sin TML = LR \sin TLM,$$

ou, en abaissant des points R et Ω sur LM les perpendiculaires Rr et Ωω, et observant que les angles ΩMT et RLT sont droits,

$$M\Omega \sin M\Omega\omega = LR \sin LRr,$$

c'est-à-dire

$$M\omega = Lr.$$

Les points L, M et ω étant connus, on déduit de là le point *r*. Il n'y a plus dès lors, pour avoir le point R de la normale LR cherchée, qu'à prendre l'intersection de KI et de la perpendiculaire élevée en *r* à LM.

De même, pour *la détermination du point où LΩ touche son enveloppe*, la seconde et la troisième égalité du n° 3 restant les mêmes, il faut remplacer la première par la suivante :

$$\frac{d(L)}{d(\Omega)} = \frac{L\tau}{H\tau},$$

τ étant le point de rencontre des tangentes aux courbes décrites respectivement par les points L et H, tangentes qui sont maintenant toutes deux connues, puisque $H\tau$ est donnée et que $L\tau$ est perpendiculaire à LR . Dès lors on a, D étant le centre de courbure de n et β le point où LR est coupée par la normale $z\beta$ à l'enveloppe de $L\Omega$,

$$\frac{L\tau}{H\tau} = \frac{L\beta}{HD},$$

ou

$$\frac{L\tau}{L\beta} = \frac{H\tau}{HD},$$

ce qui prouve l'égalité des angles $L\tau\beta$ et $H\tau D$ et, conséquemment, celle des angles $H\tau L$ et $D\tau\beta$. Mais, si HD coupe LR en Q , les angles τLQ et τHQ étant droits, l'angle HQL égale l'angle $H\tau L$ et, par suite, l'angle $D\tau\beta$. Les points Q, β, D, τ sont donc sur un même cercle.

De là, la détermination du point β et, par suite, du point z , pied de la perpendiculaire abaissée de β sur $L\Omega$.

Le reste de la solution est le même que précédemment. On prend le point de rencontre U de LM' et de la perpendiculaire à $L\Omega$ menée par R , et l'on tire la droite Uz ; elle donne sur ΩK le centre de courbure Ω' cherché.

Ici encore s'applique d'ailleurs la remarque du n° 7, lorsque l'adjointe n est une droite.

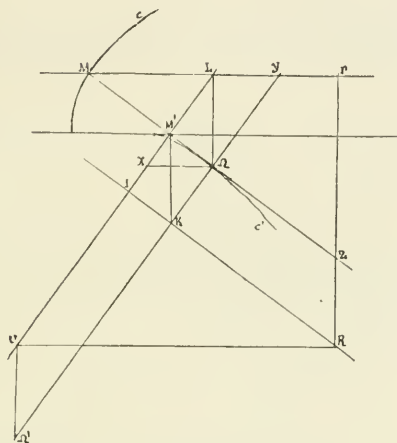
9. A titre d'application, prenons une parabole et donnons-nous comme pôle P un point quelconque de l'axe, comme pôle O le point à l'infini de cet axe.

La sous-normale de la parabole étant constante, la courbe n sera ici une perpendiculaire à l'axe. Donc, pour avoir le centre de courbure Ω (*fig. 3*), nous n'avons, après avoir pris le point de rencontre L de la perpendiculaire élevée à la normale MM' par le point M' où elle coupe l'axe et de la parallèle à l'axe menée par le point M , qu'à abaisser de ce point la perpendiculaire $L\Omega$ sur l'axe.

Du point K où se rencontrent les perpendiculaires respectivement élevées à l'axe en M' et à MM' en Ω , abaissons sur LM' la perpendiculaire KI . Le point R est déterminé sur cette droite par la condition que sa projection r sur LM soit à une distance de L

égale à celle de ω , projection de Ω sur la même droite, au point M. Mais ici le point ω se confond avec L; donc r est symétrique de M par rapport à L; on a ensuite le point R en abaissant du point r la perpendiculaire rR sur l'axe. Pour avoir le point U, il suffit de

Fig. 3.



mener par R une perpendiculaire à $L\Omega$, c'est-à-dire ici une parallèle à LM.

Comme nous sommes dans un cas d'application de la remarque du n° 7, nous n'avons plus, pour achever la solution, qu'à mener par U la parallèle $U\Omega'$ à $L\Omega$.

Le point Ω' où cette droite coupe $K\Omega$ est le centre de courbure cherché.

Remarquons que $rZ = 2L\Omega$ et que $ZR = M'K = L\Omega$. Donc $rR = 3L\Omega$.

Par suite, $LU = 3LX$ ou $\Omega\Omega' = 3Y\Omega$. Nous retrouvons ainsi le théorème de Maclaurin :

Si la normale à la développée au point Ω coupe en Y le diamètre passant au point M, on a le centre de courbure de cette développée en portant sur cette normale le segment $\Omega\Omega' = 3Y\Omega$.

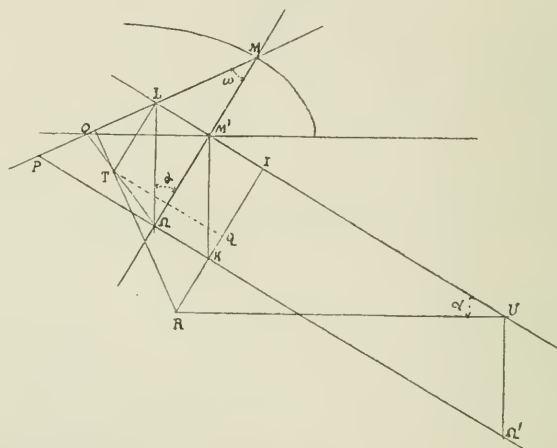
C'est là une vérification de la construction ci-dessus indiquée.

10. Il est intéressant de voir comment on peut, de ce qui précède, déduire le théorème de Maclaurin pour le cas des coniques à centre.

Je rappellerai d'abord que si l'on place le pôle O au centre et le pôle P sur un des axes de la conique, l'adjointe n est alors une droite perpendiculaire à cet axe.

Dès lors, après avoir obtenu le centre de courbure Ω de la conique en menant $M'L$ perpendiculaire à la normale MM' (fig. 4),

Fig. 4.



et LQ perpendiculaire à l'axe OM' (*), on construit le centre de courbure Ω' de la développée par le tracé suivant, qui résulte de l'application directe de ce que l'on a vu plus haut (nos 3 et 4), avec la simplification indiquée au n° 7 :

Par K , intersection de la perpendiculaire $M'K$ à OM' et de la perpendiculaire KQ à $M'Q$, menons la perpendiculaire KI à LM' . La parallèle à QM' menée par L coupant OQ au point T , menons, par ce point, à OM une perpendiculaire qui rencontre KI en R . Il suffit alors de mener RU parallèle à OM' et UQ' perpendiculaire à cette droite pour obtenir sur la normale ΩR à la développée le centre de courbure Ω' de cette courbe. Prolongeons

(*) C'est la construction de M. Mannheim qui se trouve ainsi déduite de la construction générale dérivant de la considération de l'adjointe n .

$\Omega\Omega'$ jusqu'à son intersection P avec le diamètre OM. Posons

$$LM = l, \quad OM = \rho, \quad \Omega\Omega' = \rho', \quad \Omega P = a, \quad \widehat{OMM'} = \omega, \quad \widehat{LQM} = z;$$

nous avons $MM' = l \cos \omega$, puis, dans le triangle OMM',

$$OM = MM' \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z - \omega\right)} = l \frac{\cos \omega \cos z}{\cos(z + \omega)}.$$

Maintenant les triangles semblables OTL et OQM donnent

$$\begin{aligned} TL = \rho \frac{OL}{OM} &= \rho \left(1 - \frac{l}{OM}\right) = \rho \left[1 - \frac{\cos(z + \omega)}{\cos z \cos \omega}\right] \\ &= \rho \tan z \tan \omega = h \tan z. \end{aligned}$$

Évaluons maintenant le rayon de courbure $\Omega\Omega' = \rho'$.

Nous avons

$$\rho' = LU = LI + IU.$$

Mais

$$LI = 2 LM' = 2 l \sin \omega;$$

et

$$\begin{aligned} IU &= RU \cot z = (RQ + QI) \cot z \\ &= (TQ \tan \omega + TL) \cot z \\ &= (2 l \sin \omega \tan \omega + h \tan z) \cot z \\ &= 2 l \sin \omega \tan \omega \cot z + h. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \rho' &= 2 l \sin \omega (1 + \tan \omega \cot z) + h \\ &= 2 l \frac{\sin(z + \omega)}{\sin z} \tan \omega + h. \end{aligned}$$

Or le triangle LQM donne

$$\frac{\rho}{l} = \frac{\sin(z + \omega)}{\sin z};$$

par suite

$$\rho' = 2 \rho \tan \omega + h = 3h,$$

ce qui démontre le théorème de Maclaurin :

Le rayon de courbure $\Omega\Omega'$ de la développée d'une conique est égal au triple du segment PQ de la normale à cette développée, compris entre le centre de courbure Ω et le diamètre OM.

Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques; par M. G. FURET.

1. M. Jamet a fait connaître en 1887 ⁽¹⁾ une propriété intéressante du rayon de courbure de deux classes de courbes, déjà étudiées antérieurement par de La Gournerie ⁽²⁾, sous le nom de *courbes triangulaires symétriques* et de *courbes tétraédrales symétriques*.

Les premières, rapportées à un triangle de référence convenablement choisi, ont une équation ponctuelle de la forme

$$Ax^n + By^n + Cz^n = 0.$$

L'exposant n , qui peut être quelconque, positif ou négatif, est appelé *l'exposant de la courbe*. Le triangle de référence a reçu le nom de *triangle de symétrie de cette courbe*.

Les courbes de la seconde classe résultent de l'intersection de deux surfaces qui, rapportées à un même tétraèdre de référence convenablement choisi, ont respectivement pour équations ponctuelles des équations de la forme

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0,$$

$$A'x^n + B'y^n + C'z^n + D't^n = 0.$$

Ces équations définissent chacune une surface appelée par de La Gournerie *surface tétraédrale symétrique*. Le nombre n , d'ailleurs positif ou négatif, est en même temps l'exposant de ces surfaces et l'exposant de la courbe tétraédrale symétrique, qui en est l'intersection. Le tétraèdre de référence est appelé *tétraèdre de symétrie de la courbe*.

2. Je me propose de démontrer ici, par des considérations géométriques fort simples, deux théorèmes auxquels M. Jamet est parvenu, en suivant la voie analytique ⁽³⁾. Je vais m'appuyer pour cela sur la remarque suivante, qui résulte d'une formule élé-

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. IV, supplément, p. 19.

(2) *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques* (année 1867).

(3) J'ai déjà fait une première Communication verbale sur ce même sujet dans la séance du 7 mai 1890.

gante ⁽¹⁾ due à M. le général Peaucellier, mais que j'établirai directement.

En transformant par homographie l'ensemble de deux courbes tangentes dans un même plan, on n'altère pas le rapport des rayons de courbure de ces deux courbes en leur point de contact.

Soient, dans un plan,

(C) et (C') deux courbes tangentes en un certain point m ,
(O) et (O') les cercles respectivement osculateurs à ces deux courbes en m ,
 R et R' les rayons respectifs de ces cercles.

Ces cercles peuvent être considérés comme homothétiques, le centre d'homothétie étant le point m et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{R}{R'}$.

Faisons subir à la figure une transformation homographique quelconque. Les courbes (C) et (C') deviennent deux nouvelles courbes (Γ) et (Γ') tangentes au point μ , homologue de m . Les cercles (O) et (O') se changent respectivement en deux coniques (Ω) et (Ω') osculatrices en μ , la première à la courbe (Γ), la seconde à la courbe (Γ'). Ces deux courbes sont homologues; elles ont le point μ pour centre d'homologie, et pour axe d'homologie la droite Δ , à laquelle correspond, dans la figure primitive, la droite de l'infini.

Par le point μ faisons passer une droite Λ infiniment voisine de la tangente en ce point aux deux coniques (Ω) et (Ω'): la droite Λ coupe respectivement les deux courbes en deux points α et α' infiniment voisins de μ . Si ν est le point de rencontre de la sécante considérée avec Δ , on a évidemment

$$(1) \quad \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha'} : \frac{\nu\alpha}{\nu\alpha'} = \frac{ma}{ma'} = \frac{R}{R'},$$

a et a' étant les seconds points d'intersection des cercles (O) et

(1) *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective*, par M. Peaucellier, capitaine du Génie (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1^{re} série, t. XX, p. 427).

(O') avec la droite L de la première figure qui correspond à la droite A de la seconde.

Considérons maintenant deux cercles (ω) et (ω') tangents en μ à (Ω) et (Ω') et passant le premier par le point z , le second par le point z' . Ces cercles, lorsque z et z' viennent coïncider avec μ , deviennent respectivement les cercles osculateurs en μ aux coniques (Ω) et (Ω'), par conséquent aux courbes (Γ) et (Γ'). En désignant par ρ et ρ' les rayons de ces cercles osculateurs, on a

$$(2) \quad \frac{\rho}{\rho'} = \lim. \frac{\mu z}{\mu z'},$$

et, en observant que $\frac{\nu z}{\nu z'}$ tend vers 1, on conclut de la comparaison des relations (1) et (2)

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{R}{R'}.$$

3. *Remarque.* — Deux courbes gauches ayant, en un point commun, même tangente et même plan osculateur, se transforment par homographie en deux courbes gauches ayant, en un même point, même tangente et même plan osculateur. On peut, d'ailleurs, répéter identiquement les raisonnements qui viennent de nous servir dans le cas des courbes planes; de sorte que l'on peut énoncer ce théorème :

En transformant par homographie l'ensemble de deux courbes qui ont, en un point commun, même tangente et même plan osculateur, on n'altère pas le rapport des rayons de courbure de ces deux courbes en leur point de contact.

4. Considérons la courbe définie, en coordonnées polaires, par l'équation

$$(3) \quad r^n \cos n\theta = k$$

ou, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$(4) \quad (x + iy)^n + (x - iy)^n = 2k.$$

Une pareille courbe, comme le montre l'équation (4), est une courbe triangulaire symétrique, dont le triangle de symétrie a pour sommets l'origine des coordonnées O et les points cycliques I et J, par lesquels passent à l'infini tous les cercles du plan.

On sait, d'autre part, et l'on démontre aisément, au moyen de l'équation (3), que le rayon de courbure R en un point M quelconque de la courbe ainsi définie est dans un rapport constant, égal à $\frac{1}{1-n}$, avec le segment de la normale correspondante compris entre le point M et le point d'intersection N de la perpendiculaire élevée en O à OM .

Mais on peut interpréter d'une autre manière cette propriété, en remarquant que MN est le diamètre du cercle passant par le point O et tangent en M à la courbe (3). En désignant par R' le rayon de ce cercle, on a

$$(5) \quad \frac{R}{R'} = \frac{2}{1-n}.$$

§. Faisons maintenant subir une transformation homographique imaginaire à la figure précédente. En choisissant convenablement cette transformation, on changera la courbe (3) en l'une quelconque des courbes triangulaires symétriques d'exposant n . Le cercle décrit sur MN , comme diamètre, deviendra une conique tangente à la courbe triangulaire et circonscrite à son triangle de symétrie. Enfin le rapport des rayons de courbure, en leur point de contact, de la courbe triangulaire et de la conique qui vient d'être définie, n'étant pas altéré par la transformation (art. 2), ce rapport, en vertu de la relation (5), sera égal à $\frac{2}{1-n}$. Ainsi se trouve démontré le théorème suivant dû à M. Jamet :

Le rayon de courbure, en un point quelconque, d'une courbe triangulaire symétrique d'exposant n , est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure, au même point, de la conique tangente en ce point à la courbe et circonscrite au triangle de symétrie.

La construction du rayon de courbure d'une courbe triangulaire symétrique se trouve ainsi ramenée à la construction du rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points. J'ai traité cette question précédemment (1); je n'y reviendrai pas ici.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 778. Voir égale-

6. Considérons une courbe tétraédrale symétrique d'exposant quelconque n . M. Jamet a démontré que *la cubique gauche tangente, en un point quelconque, à une pareille courbe et passant par les sommets de son tétraèdre de symétrie a , au point de contact, même plan osculateur que cette courbe.*

Il résulte de là, en vertu d'une remarque précédente (art. 3), que le rapport des rayons de courbure de la courbe tétraédrale et de la cubique ainsi déterminée se conserve dans une transformation homographique quelconque. Faisons, en particulier, une perspective de la figure sur l'une des faces du tétraèdre de symétrie, en prenant comme centre de projection le sommet opposé de ce tétraèdre. La courbe tétraédrale d'exposant n se projette suivant une courbe triangulaire symétrique d'exposant n , la cubique suivant une conique tangente à cette courbe et circonscrite à son triangle de symétrie. Or les rayons de courbure de ces deux dernières courbes sont dans un rapport constant et égal à $\frac{2}{1-n}$ (art. 5). Donc il en est de même du rapport des rayons de courbure de la courbe tétraédrale et de la cubique. De là ce théorème, dû également à M. Jamet :

Le rayon de courbure, en un point quelconque, d'une courbe tétraédrale symétrique d'exposant n , est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure, au même point, de la cubique gauche tangente en ce point à la courbe et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.

Les considérations dont je viens de faire usage dans le dernier paragraphe de la présente Note sont empruntées à une Communication faite par M. Demoulin, dans la séance du 4 mai dernier. Je les ai reproduites ici, parce qu'elles m'ont paru ajouter à l'intérêt de la question que je me suis proposé de traiter; mais j'en laisse tout le mérite à ce jeune géomètre distingué.

ment sur ce sujet deux Notes de M. Mannheim (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 619, et *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII, p. 155).

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Élie Perrin : *Quelques remarques sur la démonstration d'un théorème d'Arithmétique.*

M. d'Ocagne : *Sur une transformation géométrique conduisant à la construction de courbes unicursales par points et par tangentes.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur un problème de Géométrie.

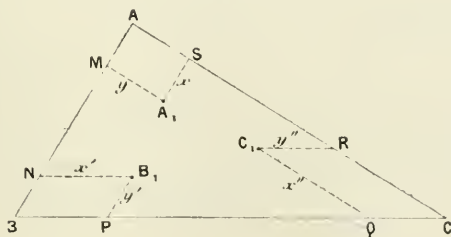
L'énoncé suivant m'a été communiqué, il y a bien des années déjà, par M. Lemoine. Je ne erois pas qu'il l'ait publié, ni qu'une solution en ait été donnée :

Trois points A_1, B_1, C_1 ont respectivement pour coordonnées x, y ; x', y' ; x'', y'' par rapport aux côtés AB, AC ; BC, BA ; CA, CB d'un triangle, pris pour axes coordonnés.

Connaissant A_1, B_1, C_1 , et les six valeurs x, y, x', y', x'', y'' , trouver le triangle ABC .

Mon intention n'est pas de donner ici une solution de cette

Fig. 1.



question, et je ne crois pas qu'il soit aisé ni même possible d'en trouver une simple. Je veux simplement montrer théoriquement

comment on pourrait la résoudre, et surtout en indiquer une transformation assez curieuse.

Si nous appelons α , β , γ les inclinaisons des trois droites inconnues BC, CA, AB sur une direction fixe quelconque, et si nous posons (*voir* la *fig.* 1) :

$$MN = w\varepsilon\gamma \quad PQ = u\varepsilon\alpha, \quad RS = v\varepsilon\beta,$$

nous avons évidemment les trois équipollences

$$(1) \quad \begin{cases} x'\varepsilon\alpha + \gamma\varepsilon\beta + w\varepsilon\gamma = A_1B_1, \\ u\varepsilon\alpha + x''\varepsilon\beta + \gamma'\varepsilon\gamma = B_1C_1, \\ \gamma''\varepsilon\alpha + v\varepsilon\beta + x\varepsilon\gamma = C_1A_1. \end{cases}$$

Ce système contient six inconnues α , β , γ , u , v , w , et il équivaut à six équations algébriques.

Il est donc bien déterminé. On verrait d'ailleurs qu'une fois les valeurs α , β , γ , u , v , w obtenues, la construction des points A, B, C serait des plus simples.

La résolution du système (1) peut être effectuée de la façon suivante, que nous indiquons seulement. On en tire les valeurs de $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$ en considérant les équipollences comme des équations linéaires; et l'on multiplie l'expression de $\varepsilon\alpha$ par sa conjuguée, ce qui donne pour produit 1. De même pour $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$. On a donc ainsi trois équations en u , v , w . Mais chacune d'elles est du sixième degré, ce qui paraît indiquer presque l'impossibilité d'une solution simple, à moins de réductions imprévues.

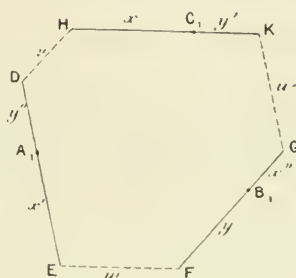
Mais le problème, comme nous le disions plus haut, se transforme en un autre équivalent, par la considération des équipollences (1) qui en traduisent l'énoncé. Prenons, en effet, par exemple, la première de ces équipollences. Le premier membre doit représenter une ligne brisée de trois tronçons partant de A_1 pour aboutir en B_1 ; le premier tronçon a pour longueur donnée x' ; un autre a pour longueur γ ; et il faut que le tronçon qui complète la ligne brisée ait pour direction γ . En répétant la même observation sur les deux autres équipollences, nous arrivons ainsi à reconnaître que la question peut prendre la forme que voici :

Étant donnés sur un plan trois segments DE, FG, KH pouvant pivoter chacun autour d'un point fixe A_1 , B_1 , C_1 , qui lui

appartient, orienter ces segments de telle sorte que les droites GK, HD, EF soient parallèles à DE, FG, KH respectivement.

Les longueurs données sont représentées sur la figure et celles

Fig. 2.



de GK, HD, EF sont précisément u, v, w .

Cet énoncé nouveau ne conduirait pas à une solution plus simple, si ce n'est peut-être au point de vue graphique et par tâtonnements. Il est, en tous cas, d'apparence assez différente de la question primitive, bien que le problème soit identiquement le même.

SÉANCE DU 20 JUILLET 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Laisant lit une lettre d'Abel Transon, écrite en 1868, et relative aux principes du Calcul directif.

M. Emile Picard transmet une Note de M. Mangeot intitulée : *Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales.*

M. Félix Lucas : *Sur la théorie des courants polyphasés.*

M. Raffy présente une Note de M. Caronnet : *Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur les singularités des courbes algébriques planes.

1. Les nombres qui entrent dans les formules de Plücker sont

deux à deux corrélatifs, sauf le genre p qui est dualistique. Les nombres corrélatifs sont :

- 1° Le degré n et la classe k ;
- 2° Le nombre des points doubles d et celui des tangentes doubles t ;
- 3° Le nombre des points de rebroussement r et celui des tangentes d'inflexion i .

L'égalité de deux nombres corrélatifs n'entraîne pas toujours celles des autres; car pour les cubiques de genre $p = 1$, on a

$$\begin{aligned} n = 3, & \quad d = 0, & \quad r = 0, \\ k = 6, & \quad t = 0, & \quad i = 9. \end{aligned}$$

Mais ce fait est exceptionnel. En effet, on peut déduire des formules de Plücker les égalités suivantes

$$\begin{aligned} 3(n - k) &= r - i, \\ 2(d - t) &= (n - k)(n + k - 9); \end{aligned}$$

de sorte que

- 1° Si $n = k$, on a $r = i$, $d = t$;
 - 2° Si $r = i$, on a $n = k$, $d = t$;
 - 3° Si $d = t$, on peut avoir soit $n = k$ et $r = i$, soit $n + k = 9$;
- cette dernière solution conduit aux cas suivants corrélatifs deux à deux :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} n = 3, & k = 6, & d = t = 0, & r = 0, & i = 9, & p = 1; \\ n = 6, & k = 3, & d = t = 0, & r = 9, & i = 0, & p = 1. \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} n = 4, & k = 5, & d = t = 2, & r = 1, & i = 4, & p = 0; \\ n = 5, & k = 4, & d = t = 2, & r = 4, & i = 1, & p = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En résumé, sauf les cas que je viens d'énumérer, l'égalité de deux nombres corrélatifs entraîne celle des autres.

2. La présence de points multiples abaissant la classe d'une courbe, on pourrait penser que, parmi les courbes d'un degré n donné, celles dont la classe a la plus petite valeur sont les courbes unicursales, d'autant plus que c'est ce qui se produit pour les valeurs inférieures de n , $n = 3, 4$ ou 5 . Mais cela n'est plus vrai

pour les valeurs supérieures, cela tient à ce que l'on a la relation suivante :

$$2k = n + 2 - 2p + i,$$

d'où l'on déduit, i ne pouvant être négatif,

$$k \leq \frac{n+2}{2} - p.$$

Il est facile de vérifier que l'on peut toujours trouver des nombres positifs satisfaisant aux relations de Plücker et tels que pour $p = 1$, par exemple, on puisse obtenir une valeur de k inférieure à la valeur minima qui correspondrait à $p = 0$. Il est vrai qu'il n'est pas démontré qu'à tout système de nombres positifs vérifiant les formules de Plücker il correspond une courbe. Mais il résulte des Tableaux donnés par Clebsch (*Leçons de Géométrie*, trad. Benoist, t. II, p. 68) que les courbes du 6^e, du 7^e, du 8^e degré de classe minima sont de genre 1; celles du 9^e et du 10^e degré sont de genre 2; celles du 12^e degré sont de genre 3; ces courbes ayant une existence effective comme le montrent des exemples.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Égalités à deux et à trois degrés; par M. Michel FROLOV.

Le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et, sous ce titre une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

JACOBI à LEGENDRE.

1. Dans notre Mémoire *Sur les égalités à deux degrés*, en 1889, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, nous avons démontré que les égalités à plusieurs degrés, consécutifs et entiers, sont susceptibles de différentes transformations. Ainsi, on peut augmenter ou diminuer de la même quantité tous les termes d'une égalité; les multiplier ou diviser par la même quantité; retrancher tous ces termes d'une même quantité, additionner les égalités les unes aux autres, etc.

Dans ce second Mémoire, nous voulons compléter ces études relativement aux égalités à deux et à trois degrés.

2. Appelons S_1, S_2 et S_3 les sommes des premières, deuxièmes et troisièmes puissances des nombres d'un groupe, et conservons les signes $\mathbf{1}$ et Δ pour désigner les égalités à deux et à trois degrés, que nous avons adoptés dans le premier Mémoire.

Prenons l'égalité à trois degrés composée des plus petits nombres

$$1, 5, 8, 12 \Delta 2, 3, 10, 11 \quad (S_1 = 26; \quad S_2 = 234; \quad S_3 = 2366).$$

Augmentons tous les termes de 2,

$$3, 7, 10, 14 \Delta 4, 5, 12, 13.$$

et additionnons les deux égalités, en supprimant les nombres communs à deux groupes,

$$1, 7, 8, 14 \Delta 2, 4, 11, 13 \quad (S_1 30; \quad S_2 = 310; \quad S_3 = 3600).$$

Cette égalité se déduit aussi directement de l'identité

$$1, 4, 2, 5 \Delta 2, 1, 5, 4,$$

en ajoutant à ses termes la suite additionnelle 0, 1, 2, 3, jusqu'à ce que tous les termes prennent des valeurs différentes, comme nous l'avons fait dans le n° 9 du premier Mémoire, pour former les égalités à deux degrés. En continuant l'addition de cette suite, on obtient

$$1, 8, 10, 17 \Delta 2, 5, 13, 16 (36; 454; 6426),$$

$$1, 9, 12, 20 \Delta 2, 6, 15, 19 (42; 626; 10458),$$

$$1, 10, 14, 23 \Delta 2, 7, 17, 22 (48; 826; 15912),$$

$$1, 11, 16, 26 \Delta 2, 8, 19, 25 (54; 1054; 23004),$$

$$1, 12, 18, 29 \Delta 2, 9, 21, 28 (68; 1310; 31950),$$

$$1, 13, 20, 32 \Delta 2, 10, 23, 31 (66; 1594; 42966),$$

et ainsi de suite.

On peut déduire de ces égalités une grande quantité d'autres au moyen des transformations indiquées plus haut. Par exemple, en additionnant les termes des deux dernières et en les diminuant de l'unité, on trouve

$$1, 24, 37, 60 \Delta 3, 18, 43, 58 (122; 5546; 280478).$$

Voici encore quelques égalités de cinq, six et sept termes :

$$\begin{aligned}
 &1, 4, 8, 12, 17 \Delta 2, 3, 7, 11, 16, \quad (42: 514: 7218), \\
 &1, 6, 10, 14, 17 \Delta 2, 4, 11, 15, 16 \quad (48: 622: 8874), \\
 &1, 4, 6, 9, 11, 14 \Delta 2, 3, 5, 10, 12, 13 \quad (45: 451: 5085), \\
 &1, 5, 6, 12, 13, 17 \Delta 2, 3, 7, 11, 15, 16 \quad (54: 664: 9180), \\
 &1, 10, 23, 27, 31, 44, 69 \Delta 3, 11, 20, 21, 34, 49, 67 (205: 9017: 476335), \\
 &1, 14, 24, 28, 32, 45, 70 \Delta 4, 12, 21, 25, 34, 50, 68 (214: 9506: 505414).
 \end{aligned}$$

Ces exemples suffisent pour montrer avec quelle facilité se forment les égalités à trois degrés.

3. S'il y a égalité des sommes des premières et des troisièmes puissances des termes de deux ou de plusieurs groupes, il n'en résulte pas qu'il existe aussi l'égalité des sommes de leurs deuxièmes puissances, comme le font voir les exemples suivants :

On a

$$(1) \quad \begin{cases} 1+8+13+14=2+7+12+15=36, \\ 1^3+8^3+13^3+14^3=2^3+7^3+12^3+15^3=5454. \end{cases}$$

Mais

$$1^2+8^2+13^2+14^2=430.$$

et

$$2^2+7^2+12^2+15^2=422.$$

On a

$$(2) \quad \begin{cases} 1+5+10+14+19=2+4+9+16+18=49, \\ 1^3+5^3+10^3+14^3+19^3=2^3+4^3+9^3+16^3+18^3=10729. \end{cases}$$

Mais

$$1^2+5^2+10^2+14^2+19^2=683.$$

et

$$2^2+4^2+9^2+16^2+18^2=681.$$

On peut aussi avoir égalité des sommes des troisièmes puissances, sans égalité des sommes ni des premières, ni des deuxièmes puissances. Par exemple, on a

$$1^3+3^3+5^3+11^3+13^3=2^3+6^3+9^3+10^3+12^3=3681,$$

tandis que

$$1^2+3^2+5^2+11^2+13^2=325 \quad \text{et} \quad 2^2+6^2+9^2+10^2+12^2=365,$$

$$1+3+5+11+13=33 \quad \text{et} \quad 2+6+9+10+12=39.$$

Remarquons encore que l'égalité des sommes des puissances de degrés entiers n'est jamais suivie de celle des sommes des puis-

sances de degrés fractionnaires, ce qui est évident, car les radicaux aux indices fractionnaires sont des nombres irrationnels.

Voici un exemple qui fera voir comment balancent les sommes pour les degrés fractionnaires en devenant plus grandes, tantôt pour l'un, tantôt pour l'autre groupe :

$$\begin{aligned}
 1^0 + 14^0 + 22^0 + 35^0 &= 2^0 + 11^0 + 25^0 + 34^0 = & 4, \\
 1^{\frac{1}{2}} + 14^{\frac{1}{2}} + 22^{\frac{1}{2}} + 35^{\frac{1}{2}} &= & 15, 25, \quad 2^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}} + 25^{\frac{1}{2}} + 34^{\frac{1}{2}} = & 15, 56, \\
 1^1 + 14^1 + 22^1 + 35^1 &= 2^1 + 11^1 + 25^1 + 34^1 = & 72, \\
 1^{\frac{3}{2}} + 14^{\frac{3}{2}} + 22^{\frac{3}{2}} + 35^{\frac{3}{2}} &= & 363, 63, \quad 2^{\frac{3}{2}} + 11^{\frac{3}{2}} + 25^{\frac{3}{2}} + 34^{\frac{3}{2}} = & 362, 56, \\
 1^2 + 14^2 + 22^2 + 35^2 &= 2^2 + 11^2 + 25^2 + 34^2 = & 1906, \\
 1^{\frac{5}{2}} + 14^{\frac{5}{2}} + 22^{\frac{5}{2}} + 35^{\frac{5}{2}} &= 10251, 00, \quad 2^{\frac{5}{2}} + 11^{\frac{5}{2}} + 25^{\frac{5}{2}} + 34^{\frac{5}{2}} = 10273, 00, \\
 1^3 + 14^3 + 22^3 + 35^3 &= 2^3 + 11^3 + 25^3 + 34^3 = 56268.
 \end{aligned}$$

4. La méthode employée dans le premier Mémoire pour la répartition en plusieurs groupes égaux à deux degrés d'une progression arithmétique peut aussi être appliquée à la répartition des nombres en groupes égaux à trois et à plus de degrés.

Soit une progression des nombres naturels,

$$1, 2, 3 \dots (m-2), \quad (m-1), \quad m, \quad (m+1), \quad (m+2), \quad (m+3) \dots 2m.$$

Nommons R la somme des cubes de deux nombres du milieu m et $(m+1)$ et u la quantité $(12m+6)$. Alors les sommes des cubes

$$(m-1)^3 + (m+2)^3, \quad (m-2)^3 + (m+3)^3, \quad (m-3)^3 + (m+4)^3, \quad \dots$$

seront respectivement égales à

$$R + u, \quad R + 3u, \quad R + 6u, \quad R + 10u, \quad \dots,$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier la quantité u par les nombres figurés du premier ordre ou nombres triangulaires

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \quad \dots, \quad \frac{m(m+1)}{2}.$$

Il s'ensuit que pour répartir $2m$ nombres consécutifs en m groupes égaux à trois degrés, il suffit de répartir en m groupes égaux à un degré les $(m-1)$ premiers nombres triangulaires, en y ajoutant 0, dont la somme est égale au nombre figuré du second ordre ou nombre pyramidal $\frac{(m-1)m(m+1)}{6}$.

5. Il est possible de répartir en deux groupes les huit premiers nombres triangulaires

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,$$

dont la somme est égale à 84, car on a

$$0 + 6 + 15 + 21 = 1 + 3 + 10 + 28 = 42.$$

Dans ce cas $m = 8$. En remplaçant les nombres triangulaires par des couples de nombres correspondants, on aura l'égalité à trois degrés

$$1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16 \Delta 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15,$$

donnant les sommes

$$S_1 = 68, \quad S_2 = 748, \quad S_3 = 9248.$$

La somme des premiers dix-huit nombres triangulaires, y compris 0, étant égale à 969, on peut les répartir en trois groupes de 323, des deux manières suivantes :

1.

$$\begin{aligned} 0 + 15 + 28 + 55 + 105 + 120 &= 1 + 10 + 36 + 45 + 78 + 153 \\ &= 3 + 6 + 21 + 66 + 91 + 136. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0 + 15 + 36 + 45 + 91 + 136 &= 1 + 10 + 21 + 66 + 105 + 120 \\ &= 3 + 6 + 28 + 55 + 78 + 153, \end{aligned}$$

qui donnent deux systèmes de répartition des trente-six nombres

1.

$$\begin{aligned} 1, 6, 9, 10, 14, 17, 20, 23, 27, 28, 31, 36 \Delta, \\ 2, 5, 7, 12, 15, 16, 21, 22, 25, 30, 32, 35 \Delta, \\ 3, 4, 8, 11, 13, 18, 19, 24, 26, 29, 33, 34. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 1, 6, 8, 11, 15, 16, 21, 22, 26, 29, 31, 36 \Delta, \\ 2, 5, 9, 10, 13, 18, 19, 24, 27, 28, 32, 35 \Delta, \\ 3, 4, 7, 12, 14, 17, 20, 23, 25, 30, 33, 34, \end{aligned}$$

pour lesquels

$$S_1 = 222, \quad S_2 = 5402, \quad S_3 = 147852.$$

La somme des vingt-cinq premiers nombres triangulaires, y compris 0, étant égale à 2600, on peut répartir ces nombres en cinq groupes de 520 :

$$\begin{aligned} 0 + 45 + 55 + 120 + 300, \\ 1 + 28 + 91 + 190 + 210, \\ 3 + 15 + 78 + 171 + 253, \\ 6 + 36 + 66 + 136 + 276, \\ 10 + 21 + 105 + 153 + 231. \end{aligned}$$

En remplaçant les nombres triangulaires par les couples de nombres correspondants, on aura l'égalité à trois degrés :

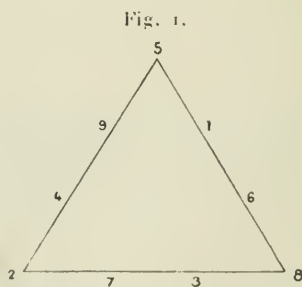
$$\begin{aligned} 1, 10, 15, 16, 25, 26, 35, 36, 41, 50 \Delta, \\ 2, 9, 14, 17, 22, 29, 34, 37, 42, 49 \Delta, \\ 3, 7, 13, 20, 23, 28, 31, 38, 44, 48 \Delta, \\ 4, 8, 11, 19, 21, 30, 32, 40, 43, 47 \Delta, \\ 5, 6, 12, 18, 24, 27, 33, 39, 45, 46. \end{aligned}$$

qui donne

$$S_1 = 255, \quad S_2 = 8585, \quad S_3 = 325125.$$

6. Dans notre premier Mémoire, nous n'avons donné qu'une méthode pour la répartition de $2n^2$ nombres en n groupes égaux à deux degrés. Mais, comme ces égalités furent dernièrement appliquées à des figures plus ou moins intéressantes, il ne sera pas de trop de revenir à ces égalités pour en dire quelques mots.

On commença par disposer des nombres appartenant à des



groupes égaux à deux degrés sur les périmètres des triangles et des carrés, comme le montrent les *fig.* 1, 2, 3.

L'égalité représentée par la *fig.* 1 s'obtient de la manière suivante :

On prend deux égalités données dans le premier Mémoire

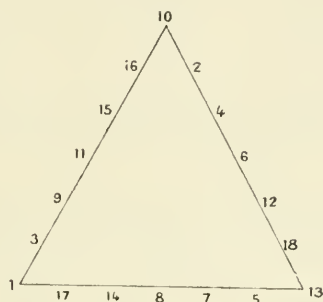
$$1, 5, 6 \perp 2, 3, 7. \quad 1, 6, 8 \perp 2, 4, 9.$$

En remarquant que les premiers groupes de ces égalités ne diffèrent entre eux que par les nombres 5 et 8, on ajoute à la première le 4^e terme 8 et à la seconde 5, et l'on obtient trois groupes égaux

$$1, 5, 6, 8 \perp 2, 3, 7, 8 \perp 2, 4, 5, 9 \quad (S_1 = 20, S_2 = 126).$$

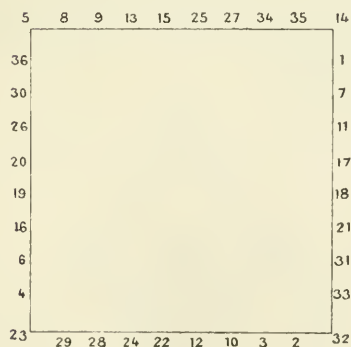
Voici les égalités de ces figures :

Fig. 2.



$$1, 3, 9, 10, 11, 15, 16 \perp 1, 5, 7, 8, 13, 14, 17 \perp 2, 4, 6, 10, 12, 13, 18 \\ (S_1 = 65, S_2 = 793).$$

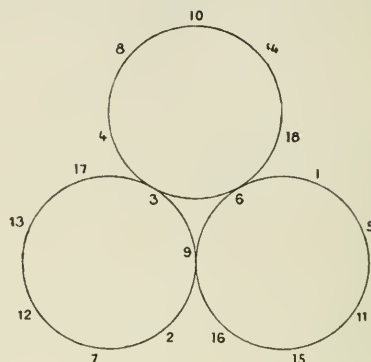
Fig. 3.



$$1, 7, 11, 14, 17, 18, 21, 31, 32, 33 \perp \\ 2, 3, 10, 12, 22, 23, 24, 28, 29, 32 \perp \\ 4, 5, 6, 16, 19, 20, 23, 26, 30, 36 \perp \\ 5, 8, 9, 13, 14, 15, 25, 27, 34, 35 \\ (S_1 = 185, S_2 = 4495).$$

On pourrait aussi disposer ces groupes sur les circonférences des cercles tangents entre eux, en plaçant les nombres qui se ré-

Fig. 4.



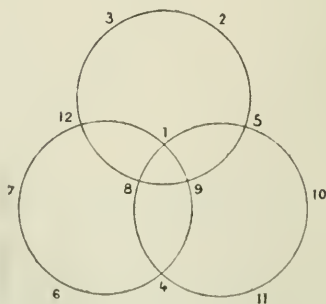
pètent dans deux groupes et se trouvent aux angles, aux points de contact, comme le montre la *fig. 4*, qui représente l'égalité

$$1, 5, 6, 9, 11, 15, 16 \perp 2, 3, 7, 9, 12, 13, 17 \perp 3, 4, 6, 8, 10, 14, 18 \\ (S_1 = 63, \quad S_2 = 745).$$

Si les groupes ont deux nombres communs entre eux, ils peuvent être représentés par des cercles qui se coupent, comme le montrent les *fig. 5*, 6 et 7.

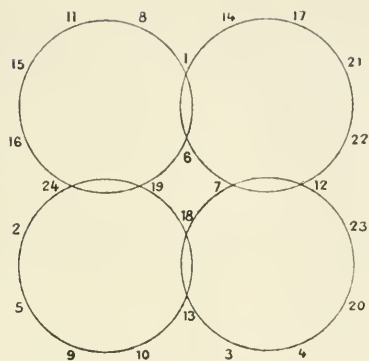
Voici leurs égalités :

Fig. 5.



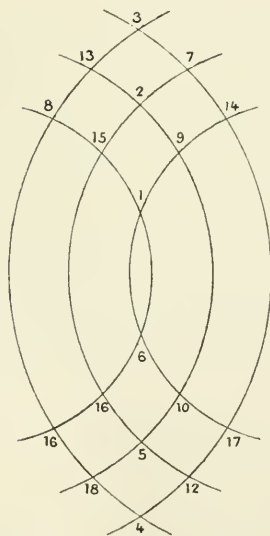
$$1, 4, 5, 8, 10, 11 \perp 1, 4, 6, 7, 9, 12 \perp 2, 3, 5, 8, 9, 12 \\ (S_1 = 39, \quad S_2 = 323).$$

Fig. 6.



1, 6, 7, 12, 14, 17, 21, 22 **┃** 1, 6, 8, 11, 15, 16, 19, 24 **┃**
 2, 5, 9, 10, 13, 18, 19, 24 **┃** 3, 4, 7, 12, 13, 18, 20, 23 **┃**
 ($S_1 = 100$, $S_2 = 1640$).

Fig. 7.



1, 6, 8, 11, 15, 16 **┃** 1, 6, 9, 10, 14, 17 **┃** 2, 5, 7, 12, 15, 16 **┃**
 2, 5, 9, 10, 13, 18 **┃** 3, 4, 7, 12, 14, 17 **┃** 3, 4, 8, 11, 13, 18
 ($S_1 = 57$, $S_2 = 703$).

Les plus intéressantes des figures numériques de cette espèce

sont les carrés magiques à deux degrés qui, sous le rapport de la difficulté, surpassent de beaucoup les carrés magiques ordinaires, ou à un degré, dont des mathématiciens se sont occupés jusqu'ici.

C'est M. G. Pfeffermann qui le premier publia des carrés à deux degrés dans les *Tablettes du Chercheur*.

Nous donnons à la page en regard deux carrés de 8 et de 9, à deux degrés.

Dans le premier, les rangées horizontales et verticales, et les deux diagonales donnent $S_1 = 260$ et $S_2 = 11180$; et dans le second $S_1 = 369$ et $S_2 = 20049$.

7. Les carrés dont les rangées sont identiques étant composés des mêmes nombres, et qui ne diffèrent entre eux que par l'arrangement et la disposition de ces rangées, ne forment que des variantes d'un même type. Il est évident que les carrés à deux et à plusieurs degrés sont susceptibles des mêmes transformations que les carrés ordinaires.

Il y a trois espèces de transformations générales des carrés que nous avons signalées dans une Note présentée, en 1886, au Congrès de Nancy de l'Association française pour l'avancement des Sciences : 1^o la rupture des carrés en deux parties, avec leur interversion; 2^o la transposition des cadres composés chacun de quatre rangées, deux horizontales et deux verticales, également éloignées du centre, en éloignant les uns et en rapprochant les autres cadres du centre; et 3^o le retournement des cadres, avec la transposition simultanée des quatre rangées de chaque cadre, de sorte que la rangée supérieure passe en bas, la rangée gauche passe à droite et réciproquement la rangée inférieure en haut et celle de droite à gauche.

Le nombre des variantes déterminé par les deux dernières transformations est égal pour n pair à

$$2^{\frac{n-2}{2}} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \frac{n-2}{2},$$

et pour n impair à

$$2^{\frac{n-3}{2}} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \frac{n-3}{2}.$$

La rupture des carrés magiques donne deux variantes, le carré

45	23	1	59	26	36	54	16
40	30	12	50	19	41	63	5
22	48	58	4	33	27	13	55
31	37	51	9	44	18	8	62
3	57	47	21	56	14	28	34
10	52	38	32	61	7	17	43
60	2	24	46	15	53	35	25
49	11	29	39	6	64	42	20

4	77	35	11	46	57	42	27	70
63	52	1	32	24	67	17	74	39
68	33	18	75	2	37	22	61	53
73	38	23	62	16	54	3	69	31
26	72	48	76	41	6	34	10	56
51	13	79	28	66	20	59	44	9
29	21	60	45	80	7	64	49	14
43	8	65	15	58	50	81	30	19
12	55	40	25	36	71	47	5	78

primordial y compris; pour les carrés semi-diaboliques, elle produit quatre variantes et pour les carrés diaboliques n^2 variantes.

Le total des variantes d'un carré semi-magique, dans lequel l'une ou les deux diagonales donnent les sommes autres que S_1 et S_2 , est égal à

$$(P_n)^2 = (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)^2.$$

8. Outre cela, tout carré dont les rangées ne sont ni complémentaires les unes des autres, ni composées de nombres complémentaires, fournit un carré complémentaire, en y remplaçant tous les nombres par leurs compléments, ce qui ne trouble pas l'égalité à plusieurs degrés, comme le montre le théorème II du premier Mémoire.

On peut encore modifier les carrés et les autres figures à plusieurs degrés, en remplaçant les nombres naturels par des nombres correspondants de toute autre progression arithmétique. On peut aussi, en partageant la série des nombres naturels en m sections de p nombres, augmenter les termes des sections de quantités différentes pour toutes les sections, et puis remplacer les nombres naturels par des nombres ainsi modifiés, si les groupes sont composés des nombres pris dans toutes les sections. Par exemple, en partageant la série de 18 nombres naturels en 6 sections

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	16, 17, 18

on peut, en laissant les nombres de la première section sans augmentation, augmenter ceux des autres sections respectivement de 1, 2, 3, 4 et 5, et en remplaçant par les nombres modifiés de cette façon les nombres naturels de l'égalité

$$1, 6, 9, 10, 14, 17 \perp 2, 5, 7, 12, 15, 16 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18 \\ (S_1 = 57, \quad S_2 = 703).$$

en déduire l'égalité suivante :

$$1, 7, 11, 13, 18, 22 \perp 2, 6, 9, 15, 19, 21 \perp 3, 5, 10, 14, 17, 23 \\ (S_1 = 72, \quad S_2 = 1148).$$

Mais toutes les modifications de ce genre ne constituent pas de solutions particulières.

9. Établissons l'impossibilité des carrés magiques à deux degrés pour des valeurs de la racine n inférieures à 8.

Les formules générales

$$S_1 = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n^3+n}{2} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{n(n^2+1)(2n^2+1)}{6}$$

donnent pour

$$\begin{array}{lll} n=3 : & S_1 = 15; & S_2 = 95, \\ n=4 : & S_1 = 34; & S_2 = 374, \\ n=5 : & S_1 = 65; & S_2 = 1105, \\ n=6 : & S_1 = 111; & S_2 = 2701, \\ n=7 : & S_1 = 175; & S_2 = 5775. \end{array}$$

On remarque que S_1 et S_2 ont la même terminaison ou chiffre final pour toutes les valeurs de n . Cela provient de ce que la cinquième puissance de tout nombre a la même terminaison que le nombre lui-même. Par exemple $2^5 = 32$; $3^5 = 243$; $7^5 = 16807$;

Et comme la différence $S_2 - S_1 = \frac{n^5-n}{3}$ et le diviseur 3 est premier avec 10, il en résulte que cette différence est un multiple de 10, et par conséquent S_1 et S_2 ont nécessairement la même terminaison.

Remarquons encore que les carrés de tous les nombres impairs sont toujours de la forme $(4h+1)$. Donc, si la somme S_2 est de la forme $(4h+1)$, les groupes de nombres doivent contenir 1, 5, 9, ... impairs et n'en peuvent pas contenir 3, 7, 11, ... Au contraire, si S_2 est de la forme $(4h+3)$ les groupes ne pourront contenir 1, 5, 9, ... impairs.

L'impossibilité des carrés magiques à deux degrés se voit immédiatement pour $n=3$ et 4, car parmi les 8 groupes de trois nombres donnant $S_1 = 15$:

1, 5, 9; 1, 6, 8; 2, 4, 9; 2, 5, 8; 2, 6, 7; 3, 4, 8; 3, 5, 7; 4, 5, 6; aucun ne donne $S_2 = 95$, et pour $n=4$, de 86 groupes donnant $S_1 = 34$, il n'y a que deux :

$$2, 8, 9, 15 \quad \text{et} \quad 3, 5, 12, 14$$

qui donnent $S_2 = 374$.

Pour $n=5$, $S_2 = 1105$ étant de la forme $(4h+1)$, on ne peut disposer dans le carré les 13 impairs qu'en prenant deux rangées

de 5 impairs et trois de 1 impair et de 4 pairs. Or, parmi les 1394 groupes donnant $S_1 = 65$, pas un seul composé de 5 impairs ne donne $S_2 = 1105$.

Pour $n = 6$, on trouve deux systèmes de répartition en 6 groupes égaux à deux degrés :

I.	II.
1, 8, 22, 24, 26, 30	1, 10, 18, 24, 26, 32
2, 12, 17, 18, 28, 24	2, 12, 14, 22, 28, 33
3, 9, 19, 20, 25, 35	3, 7, 20, 21, 29, 31
4, 5, 21, 23, 27, 31	4, 9, 15, 23, 25, 35
6, 10, 14, 16, 32, 33	5, 11, 13, 19, 27, 36
7, 11, 13, 15, 29, 36	6, 8, 16, 17, 30, 34

Mais ces deux systèmes ne se prêtent pas à la formation d'un carré magique, ce qui est d'ailleurs impossible, à cause de l'impossibilité de disposer dans le carré les 18 impairs de telle manière qu'il y ait trois rangées horizontales et verticales à 5 impairs et trois à 1 impair.

Enfin pour $n = 7$, $S_2 = 5775$ étant de la forme $(4h + 3)$, les 25 impairs doivent être distribués dans six rangées à 3 impairs et une rangée à 7 impairs. Or aucun des groupes de 7 impairs donnant $S_1 = 175$ ne donne $S_2 = 5775$.

10. Ainsi la construction des carrés magiques à deux degrés ne devient possible que pour $n = 8$ et au-dessus de 8.

Sans entrer ici dans les détails de la construction de ces carrés, nous nous bornerons à donner deux procédés de transformation des groupes de nombres qui permettront de déduire rapidement d'un seul groupe beaucoup d'autres égaux à deux degrés. On pourra ainsi dresser en peu de temps des Tables de tous les groupes de n nombres, si n n'est pas trop grand, qui serviront à la formation de tous les systèmes de répartition de n^2 nombres, ainsi qu'à la construction des figures numériques à deux degrés.

Le premier procédé consiste à prendre dans le groupe donné quatre nombres a, b, c, d , tous pairs ou impairs, ou deux pairs et deux impairs, tels que la différence de la somme des extrêmes $(a + d)$ et de celle des moyens $(b + c)$ soit un nombre pair $2r$. Si la première est plus grande, on diminue chacun des extrêmes

de r et l'on augmente de la même quantité chacun des moyens, et *vice versa*. Par exemple, en prenant quatre nombres

$$5, 12, 18, 31 \quad (S_1 = 66; S_2 = 1454),$$

on a

$$5 + 31 = 36; \quad 12 + 18 = 30; \quad 36 - 30 = 6; \quad \frac{6}{2} = 3.$$

Donc on peut remplacer ces nombres par

$$5 - 3; \quad 12 + 3; \quad 18 + 3; \quad 31 - 3$$

ou

$$2, 15, 21, 28 \quad (S_1 = 66; S_2 = 1454).$$

Soit donné le groupe

$$1, 6, 26, 35, 44, 48, 49, 51 \quad (S_1 = 260; S_2 = 11180).$$

Nous conviendrons d'écrire en chiffres gras dans les groupes les quatre nombres que nous nous proposerons de remplacer, et nous obtiendrons la série des groupes suivante :

$$1, 6, 26, 35, \mathbf{44}, \mathbf{48}, \mathbf{49}, \mathbf{51};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{35}, \mathbf{45}, 47, \mathbf{48}, \mathbf{52};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{38}, \mathbf{42}, \mathbf{45}, \mathbf{47}, 55;$$

$$1, 6, 26, \mathbf{39}, 41, \mathbf{44}, \mathbf{48}, \mathbf{55};$$

$$1, 6, 26, \mathbf{38}, \mathbf{41}, 45, \mathbf{49}, \mathbf{54};$$

$$1, 6, 26, 37, 42, 45, 50, 53,$$

et ainsi de suite.

Voici une seconde série

$$14, 15, 16, 17, \mathbf{35}, \mathbf{45}, \mathbf{58}, \mathbf{60};$$

$$14, 15, \mathbf{16}, 17, \mathbf{39}, \mathbf{41}, \mathbf{54}, 64;$$

$$14, 15, \mathbf{17}, \mathbf{21}, \mathbf{34}, \mathbf{36}, 59, 64;$$

$$14, 15, 18, 20, 33, 37, 59, 64.$$

et ainsi de suite.

11. Dans le second procédé on prend trois nombres a, b, c tous de formes différentes, $3h; (3h+1); (3h+2)$, ou tous de l'une de ces formes. C'est avec des nombres pareils que sont composées les égalités $1, 5, 6 \perp 2, 3, 7; 1, 8, 9 \perp 3, 4, 11; 1, 11, 12 \perp 4, 5, 15, \dots$, dont les termes peuvent être augmentés respectivement des nombres additionnels $0, 1, 2$, comme c'est expliqué dans le premier Mémoire. La différence de la somme des

extrêmes $(a + c)$ et du double du moyen $2b$ sera nécessairement divisible par 3. Nommons-la $3t$.

Si $a + c > 2b$, on augmente le terme moyen b de $2t$ et l'on diminue a et c de t , et *vice versa*.

Par exemple, dans le dernier groupe

$$14, 15, 18, 20, 33, 37, 59, 64 \quad (S_1 = 260; S_2 = 11180),$$

on a trois nombres, 15, 18, 33, de la forme $3h$; deux nombres, 37 et 64, de la forme $(3h + 1)$, et trois, 14, 20, 59, de la forme $(3h + 2)$. Si nous prenons trois nombres, tous de formes différentes,

$$20, 33, 37 \quad (S_1 = 90; S_2 = 2858),$$

on a

$$20 + 37 = 57; \quad 2 \times 33 = 66; \quad 66 - 57 = 9; \quad \frac{9}{3} = 3; \quad 2 \times 3 = 6.$$

Comme $(a + c) < 2b$, on fait

$$20 + 3; \quad 33 - 6; \quad 37 + 3,$$

ce qui donne

$$23, 27, 40 \quad (S_1 = 90; S_2 = 2858).$$

et l'on aura un nouveau groupe

$$14, 15, 18, 23, 27, 40, 59, 64 \quad (S_1 = 260; S_2 = 11180).$$

Ces deux procédés, étant peu compliqués, suffiront pour dresser rapidement les Tables de tous les groupes égaux à deux degrés.

*Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe
des surfaces polyédrales; par M. S. MANGEOT.*

L'Académie des Sciences a mis au concours, il y a quelques années, l'étude des surfaces qui admettent les plans de symétrie des polyèdres réguliers.

L'extension que j'ai donnée à l'idée de symétrie (1) m'a conduit à rechercher quelles sont les surfaces qui possèdent les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales.

Pour qu'un système de plans soit symétrique par rapport à une

(1) *De la symétrie courbe*, thèse de Doctorat. Imprimerie Gauthier-Villars et fils.

surface, il faut évidemment, et il suffit, que les plans qui le composent soient deux à deux symétriques l'un de l'autre par rapport à la surface. Si

$$y^2 = kx^2$$

est l'équation, en axes rectangles, de deux plans du système, une surface de symétrie quelconque de l'ensemble des deux plans vérifie la relation

$$kx \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y},$$

et, dès lors, est exprimée par une équation telle que

$$xy^k = F(z).$$

La condition pour que deux autres plans (P), (P₁) du système, représentés par les équations

$$P = ax + by + cz + d = 0, \quad P_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

soient symétriques l'un de l'autre par rapport à cette même surface a pour expression

$$[by^{k+1} + (cz + d)y^k + aF(z)][a_1y^{k+1} - c_1yF'(z) + kb_1F(z)] \\ + [b_1y^{k+1} + (c_1z + d_1)y^k + a_1F(z)][ay^{k+1} - cyF'(z) + kbF(z)] = 0,$$

et donne lieu aux relations

$$ab_1 + ba_1 = ac_1 + ca_1 = ad_1 + da_1 = 0, \\ bc_1 + cb_1 = bd_1 + db_1 = 0, \\ 2(aa_1 + kbb_1)F(z) = (2cc_1z + cd_1 + dc_1)F'(z),$$

qui déterminent les fonctions P, P₁, F(z). On trouve les deux solutions

$$P = ax + cZ, \quad P_1 = \frac{a_1}{a}(ax - cZ), \quad F(z) = hZ - \frac{a^2}{c^2}$$

et

$$P = by + cZ, \quad P_1 = \frac{b_1}{b}(by - cZ), \quad F(z) = hZ - \frac{kb^2}{c^2}$$

en posant $Z = z + \frac{d}{c}$ et désignant par h une constante arbitraire.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point de l'axe des z dont la cote est $-\frac{d}{c}$, on voit que l'équation de la surface est de la forme

$$xy^k z^{k'} = h,$$

k' étant une constante, et les deux plans (P) , (P_1) sont ceux qui correspondent à l'une ou l'autre des deux formules

$$x^2 = \frac{z^2}{k}, \quad y^2 = \frac{z^2}{k'}.$$

L'interprétation de ces résultats conduit aux propositions suivantes :

1° Un système de plans ne peut offrir la symétrie par rapport à une surface courbe, indécomposable, que si les plans du système passent par un même point et sont au nombre de 2, 4 ou 6 : d'où il résulte que les surfaces polyédrales fermées ne peuvent avoir d'autres surfaces de symétrie que des plans ;

2° Quand un système de plans présente la symétrie relativement à une surface courbe, il admet une infinité d'autres surfaces de symétrie ;

3° Les seuls angles polyèdres convexes symétriques par rapport à des surfaces courbes sont les angles tétraèdres dont les quatre arêtes sont les diagonales d'un même parallélépipède rectangle ;

4° Les systèmes de six plans qui possèdent la symétrie courbe sont ceux formés par les six plans diagonaux des parallélépipèdes rectangles.

Les surfaces de symétrie des systèmes de six plans ne diffèrent pas de celles des systèmes de quatre plans. Celles-ci, rapportées aux trois plans de symétrie qu'admet nécessairement le système, ont pour équation

$$(1) \quad x^m y^n z^r = \text{const.},$$

les quatre plans du système étant définis par deux quelconques des relations

$$\frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{r}, \quad \frac{z^2}{r} = \frac{x^2}{m}, \quad \frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n}.$$

Je trouve ainsi que les surfaces Σ qui correspondent à la formule (1) sont toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales. Le problème que je me suis proposé sera donc résolu si, me donnant les valeurs de m , n , r , je puis déterminer les surfaces S qui sont symétriques par rapport à chacune des surfaces Σ .

Je considère, à cet effet, les courbes définies par les deux équations

tions

$$(2) \quad \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \lambda, \quad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r} = \mu,$$

λ et μ étant deux paramètres. Chacune d'elles est symétrique par rapport à l'une quelconque des surfaces Σ comme étant l'intersection de deux cylindres hyperboliques qui ont tous deux cette symétrie, et il en sera évidemment de même de chacune des surfaces de la congruence que forment ces courbes, c'est-à-dire des surfaces représentées par l'équation

$$(3) \quad f\left(\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}, \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r}\right) = 0,$$

où f est le symbole d'une fonction arbitraire. Ces surfaces font donc partie des surfaces S . J'ajoute que ce sont toutes les surfaces S . En effet, soit S' l'une quelconque de celles-ci. J'imagine une courbe C tracée à volonté sur S' , et un point $M(x', y', z')$ pris sur cette courbe. Le lieu des points symétriques du point M par rapport à toutes les surfaces Σ est une courbe C' , qui doit appartenir à la surface S' : or les équations de C' sont

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \frac{x'^2}{m} - \frac{y'^2}{n}, \quad \frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r} = \frac{x'^2}{m} - \frac{z'^2}{r},$$

et leur forme fait voir que, si le point M décrit la courbe C , la surface engendrée par C' , c'est-à-dire la surface S' , devra avoir une équation telle que (3).

On peut écrire l'équation (3) sous cette forme, plus symétrique,

$$(4) \quad f\left(\frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{r}, \frac{z^2}{r} - \frac{x^2}{m}, \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}\right) = 0.$$

On est parvenu, en définitive, au théorème suivant :

L'équation (4), dans laquelle f désigne une fonction arbitraire, est l'équation générale des surfaces S qui admettent toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales; et ces surfaces de symétrie sont données par la formule (1).

En particulier, les équations

$$f(x^2 + k z^2, y^2 + k z^2) = 0 \quad (k < 0),$$

$$f(2x^2 - z^2, 2y^2 - z^2) = 0,$$

$$f(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2) = 0$$

définissent respectivement les surfaces qui ont la symétrie courbe de l'angle tétraèdre régulier, celle de l'angle polyèdre de l'octaèdre régulier, et celle de l'angle tétraèdre formé par les diagonales du cube; et les deux formules

$$f(x^2 + z^2, y^2 + z^2) = 0, \quad f(2x^2 + z^2, 2y^2 + z^2) = 0$$

déterminent, la première, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les paraboloïdes isoscèles ($xy = hz$) ayant le même sommet et les mêmes plans principaux; la seconde, les surfaces dont chacune est symétrique par rapport à tous les cônes du second ordre ($xy = hz^2$), ayant les mêmes plans principaux avec une même section principale équilatère.

Je me propose de rechercher celles des surfaces S qui sont réglées et celles qui sont de révolution.

Si l'on assujettit la courbe (2), génératrice de toutes les surfaces S, à s'appuyer sur une droite donnée, on trouve une relation telle que

$$(5) \quad (a\lambda + b\mu + c)^2 + a'\lambda + b'\mu + c' = 0,$$

se réduisant à la forme

$$(6) \quad (a_1\lambda + b_1\mu + c_1)^2 + a'_1\lambda = 0,$$

lorsque la droite rencontre l'axe des z , et à celle-ci

$$(7) \quad (a_2\lambda + b_2\mu + c_2)^2 + b'_2\mu = 0,$$

quand la droite coupe l'axe des y . Cette relation représente la surface engendrée si l'on y suppose λ et μ remplacés par les valeurs $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}$, $\frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{r}$. On en conclut que celles des surfaces S sur lesquelles on peut appliquer une droite qui ne soit pas parallèle à l'une des droites D définies par les formules

$$\frac{x^2}{m} = \frac{y^2}{n} = \frac{z^2}{r}$$

sont des surfaces du second ou du quatrième ordre. Or considérons une surface S qui soit réglée : son équation aura nécessairement la forme (5). On reconnaît que, si elle n'est pas un des cylindres correspondant aux formules (2), celles de ses génératrices qui rencontrent l'axe des y ou l'axe des z ne sont parallèles à aucune des droites D. Il en résulte que son équation doit avoir à la

fois l'une et l'autre des formes (6) et (7), et comme ces formes ne peuvent être identiques qu'autant que a'_1 et b'_2 sont nuls, on voit que la surface considérée est, dans tous les cas, du deuxième degré.

D'un autre côté, en partant de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p \frac{m}{x} + q \frac{n}{y} = \frac{r}{z}$$

qui caractérise les surfaces S , et cherchant à y satisfaire en même temps qu'à l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution, on trouve que celle-ci doit se réduire à la forme

$$qx - py = 0,$$

lorsqu'on suppose l'axe de révolution non parallèle au plan des xy . Or la solution commune à ces deux équations est, on s'en assure aisément,

$$z = \sqrt{\frac{r(x^2 + y^2)}{m + n} + \text{const.}}$$

On en conclut que les surfaces S qui sont de révolution doivent vérifier l'une ou l'autre des trois équations

$$\frac{x^2}{m} - \frac{y^2 + z^2}{n + r} = \text{const.},$$

$$\frac{y^2}{n} - \frac{z^2 + x^2}{r + m} = \text{const.},$$

$$\frac{z^2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{m + n} = \text{const.}$$

Donc, les seules surfaces réglées, et les seules surfaces de révolution qui possèdent la symétrie courbe des surfaces polyédrales, sont des quadriques.

J'indiquerai encore un résultat concernant les plans de symétrie du cube.

Rapportées aux trois droites qui joignent les centres des faces opposées du cube, les surfaces S_1 qui ont les surfaces de symétrie du système des six plans diagonaux du cube sont définies par l'équation

$$f(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2) = 0,$$

et ces surfaces de symétrie par la formule

$$xy^2z = \text{const.}$$

Je cherche celles des surfaces S_1 qui sont symétriques par rapport aux six plans précédents. Chacun des neuf plans

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, & z &= 0, \\ y &= \pm z, & z &= \pm x, & x &= \pm y \end{aligned}$$

étant alors un plan de symétrie de ces surfaces, leur équation doit pouvoir être ramenée, d'après un résultat connu, à la forme

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

en posant

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \quad v = y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2, \quad w = x^2 y^2 z^2.$$

Comme l'équation aux dérivées partielles des surfaces S_1 est

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = \frac{1}{z},$$

la question revient à déterminer la fonction φ satisfaisant à la condition

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Cette relation, exprimée uniquement à l'aide de u, v, w , s'écrit ainsi

$$3 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2u \frac{\partial \varphi}{\partial v} + v \frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0.$$

En l'intégrant, on trouve que φ est une fonction quelconque des deux quantités

$$u^2 - 3v, \quad 2u^3 - 9uv + 27w,$$

c'est-à-dire une fonction des deux expressions

$$\begin{aligned} &(y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 + (x^2 - y^2)^2, \\ &(y^2 + z^2 - 2x^2)(z^2 + x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2 - 2z^2). \end{aligned}$$

On en conclut que l'équation arbitraire

$$\varphi[x^2 + \beta^2 + \gamma^2, (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)] = 0,$$

où l'on a

$$\alpha = y^2 - z^2, \quad \beta = z^2 - x^2, \quad \gamma = x^2 - y^2,$$

définit des surfaces, et les seules surfaces, possédant la symétrie plane du cube et la symétrie courbe du système de ses six plans diagonaux ⁽¹⁾.

(1) J'ai fait connaître les résultats qui précèdent dans une Communication présentée à l'Académie des Sciences (séance du 29 juin 1891).

*Sur des surfaces dont les lignes de courbure
s'obtiennent par quadrature; par M. TH. CARONNET.*

Considérons une surface quelconque (Σ) et soient α et β les paramètres des courbes de la surface qui ont pour représentation sphérique les génératrices rectilignes de la sphère.

On sait que dans ce système de coordonnées, imaginé par Ossian Bonnet, l'équation du plan tangent est (1)

$$(\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0,$$

et que l'équation des lignes de courbure revêt la forme très simple

$$(1) \quad r dx^2 - t d\beta^2 = 0,$$

si l'on pose

$$r = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2}, \quad t = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2}.$$

La courbure totale du premier membre de (1) a pour expression

$$-\frac{1}{2\sqrt{rt}} \frac{D\left(\frac{1}{\sqrt{rt}}, s\right)}{D(\alpha, \beta)}.$$

Elle s'annule donc pour

$$(2) \quad rt = f(s).$$

Considérons maintenant une surface qui ait pour élément linéaire

$$ds^2 = r dx^2 - t d\beta^2;$$

si nous supposons la relation (2) vérifiée, cette surface sera développable, et l'on obtiendra ses lignes de longueur nulle par quadratures.

Par conséquent, on obtient par de simples quadratures les lignes de courbure de toute surface (Σ) pour laquelle le ξ du plan tangent vérifie une équation telle que (2).

Pour obtenir de pareilles surfaces, représentons par

$$(3) \quad F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

(1) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Première Partie, p. 246.

une intégrale de l'équation

$$rt = f(s).$$

Si u, v, w, p sont les coordonnées tangentielles de (Σ) , on a

$$\begin{aligned}\frac{u}{p} &= \frac{\alpha + \beta}{\xi}, \\ \frac{v}{p} &= \frac{\iota(\beta - \alpha)}{\xi}, \\ \frac{w}{p} &= \frac{\alpha\beta - 1}{\xi}.\end{aligned}$$

Tirant de ces formules les expressions de ξ, α, β en fonction de u, v, w, p pour les porter dans l'équation (3), on obtiendra une relation

$$\Phi(u, v, w, p) = 0,$$

qui sera l'équation tangentielle d'une surface (Σ) dont les lignes de courbure s'obtiendront par quadrature.

On pourra faire l'application de cette remarque aux équations

$$\begin{aligned}rt - s^2 &= 0, \\ rt - s^2 + a^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dans le premier cas, l'équation

$$F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

représente une développable quelconque.

Quant à l'équation

$$rt - s^2 + a^2 = 0,$$

on trouvera son intégration dans l'Ouvrage déjà cité de M. Darboux (Liv. VII, Chap. V).

Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière; par M. BLUTEL.

THÉORÈME I. — *Toute fonction entière $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ des racines d'une équation*

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0,$$

à coefficients quelconques, peut se mettre sous forme d'une fonction entière par rapport aux coefficients de cette équation,

et par rapport à $m - 1$ racines $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, cette nouvelle fonction étant de degré p par rapport à x_{m-p} . Cette transformation n'est possible que d'une seule façon.

Démontrons d'abord la première partie du théorème pour une fonction entière $f(x_1, x_2)$ des racines d'une équation du second degré

$$x^2 + p_1x + p_2 = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation $x_1 + x_2 + p_1 = 0$, on obtient

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -p_1 - x_1).$$

Cette dernière fonction, où l'on remplacerait x_1^2 autant de fois que possible par $-(p_1x_1 + p_2)$, prendrait finalement la forme $a + x_1b$, où a et b sont des fonctions entières de p_1 et p_2 .

Supposons donc la propriété démontrée pour une équation de degré $m - 1$ et cherchons à l'étendre à une équation de degré m . Soit une fonction entière $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ des racines d'une équation entière

$$x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \dots + p_m = 0.$$

On peut la regarder simplement comme une fonction entière de $x_2, x_3, \dots, x_m$ qui sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} x^{m-1} + (x_1 + p_1)x^{m-2} + (x_1^2 + p_1x_1 + p_2)x^{m-3} + \dots \\ + x_1^{m-1} + p_1x_1^{m-2} + \dots + p_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Comme telle, elle se mettra sous forme d'une fonction entière des coefficients de cette équation et, par suite, de $x_1, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$, fonction entière aussi par rapport à $x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$ et de degré $m - 2$ par rapport à x_2 , de degré $m - 3$ par rapport à x_3 , etc.

Soit

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$$

cette nouvelle fonction; en tenant compte de la relation

$$x_1^m + p_1x_1^{m-1} + \dots + p_m = 0,$$

on la ramènera à ne contenir x_1 qu'au degré $m - 1$, et l'on aura alors la forme énoncée. Nous verrons plus loin que cette forme ne peut s'obtenir que d'une seule façon.

Il résulte immédiatement de là que toute fonction rationnelle

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)},$$

où les fonctions f_1 et F_1 possèdent les propriétés énoncées dans le théorème précédent.

THÉORÈME II. — *Si la fonction rationnelle*

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

est une fonction symétrique, les deux polynômes f_1 et F_1 de la remarque précédente regardés comme fonctions entières de $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $p_1, p_2, \dots, p_m$, ont leurs coefficients proportionnels et la valeur de la fonction symétrique est égale au rapport de deux coefficients correspondants.

Dans le cas de deux racines, on a

$$R = \frac{f(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} = \frac{a(p_1, p_2) + x_1 b(p_1, p_2)}{\Lambda(p_1, p_2) + x_1 B(p_1, p_2)}.$$

Cette fonction rationnelle du premier degré par rapport à x_1 conserve la même valeur si l'on remplace x_1 par x_2 , à cause de la symétrie de R ; cet échange n'altère d'ailleurs pas les valeurs de p_1 et p_2 ni, par suite, les coefficients a, b, Λ, B .

On en conclut qu'elle est indépendante de x_1 et, par suite, que

$$\frac{a(p_1, p_2)}{\Lambda(p_1, p_2)} = \frac{b(p_1, p_2)}{B(p_1, p_2)} = R.$$

Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned} R &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})} \\ &= \frac{a(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}) + x_{m-1} b(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}{\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}) + x_{m-1} B(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}, \end{aligned}$$

a, b, A, B étant aussi des fonctions entières de $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Puisque R est une fonction symétrique, elle ne change pas si l'on y remplace x_{m-1} par x_m , échange qui ne modifie pas $p_1, p_2, \dots, p_m$ ni, par suite, les fonctions a, b, A, B . On en conclut, comme plus haut, que l'on a

$$R = \frac{a(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})} = \frac{b(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}{B(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}.$$

Chacun de ces nouveaux rapports est de la forme

$$\frac{u(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2} v(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 w(x_1, x_2, \dots, x_{m-3})}{U(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2} V(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 W(x_1, x_2, \dots, x_{m-3})}.$$

Leur valeur ne change pas, si l'on y remplace x_{m-2} successivement par x_{m-1} et par x_m , à cause de la symétrie de R ; comme ils sont du second degré seulement par rapport à x_{m-2} , on en conclut qu'ils n'en dépendent pas, c'est-à-dire que l'on a

$$R = \frac{u}{U} = \frac{v}{V} = \frac{w}{W}$$

et trois autres égalités semblables.

La même démonstration peut évidemment se répéter de proche en proche, et l'on aura finalement pour R une suite de rapports dont les termes ne dépendent plus, en dehors de $p_1, p_2, \dots, p_m$, que de la seule racine x_1 qu'ils renferment au degré $m-1$; comme ils conservent la même valeur lorsqu'on y remplace x_1 successivement par les $m-1$ autres racines, on conclut qu'ils ne renferment pas x_1 , ce qui démontre le théorème.

CONSEQUENCES. — 1° Toute fonction rationnelle symétrique peut se mettre sous la forme

$$\frac{\omega(p_1, p_2, \dots, p_m)}{\Omega(p_1, p_2, \dots, p_m)},$$

ω et Ω désignant deux polynômes; elle peut donc être regardée comme un quotient de deux polynômes symétriques par rapport aux racines $x_1, x_2, \dots, x_m$.

2° On peut remarquer aussi que si une fonction entière

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

est symétrique et si on la met sous la *forme réduite* indiquée dans le théorème I, elle se réduira à son terme indépendant de $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. En effet, on peut la regarder comme une fonction rationnelle symétrique dont le dénominateur est 1 ; appliquant le théorème II, on voit que les coefficients des divers termes renfermant $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ au numérateur de la forme réduite sont tous nuls.

On déduit de là un perfectionnement important à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques entières.

On commencera par faire disparaître dans la fonction symétrique une racine quelconque x_m par exemple, puis on ramènera la fonction à ne plus contenir une autre racine x_{m-1} qu'au premier degré ; ce résultat obtenu, on négligera tous les termes renfermant x_{m-1} . On ramènera la fonction restante à ne plus contenir une nouvelle racine x_{m-2} qu'au second degré, puis on négligera tous les termes renfermant encore x_{m-2} , etc.

3° La réduction d'une fonction entière quelconque

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

n'est possible que d'une seule façon.

Si l'on avait en effet de deux façons différentes

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m),$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f'_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m),$$

on aurait

$$R = 1 = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}{f'_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}.$$

L'application du théorème II à cette fonction symétrique montre qu'il y a bien égalité entre les coefficients des deux fonctions f_1 et f'_1 regardées comme polynômes par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$.

Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions; par M. SCHLEGEL.

1. Pour fixer la notion d'un *cube magique à n dimensions* il faut d'abord se rappeler que le segment de droite, le carré et le cube peuvent être regardés comme les premiers termes d'une série de figures que l'on peut poursuivre dans l'espace à n dimensions ⁽¹⁾.

Le terme général de cette série, c'est-à-dire une figure régulière à n dimensions et à 2^n sommets est ce que nous appelons le *cube à n dimensions*.

Représentons-nous un système formé de $r - 1$ espaces à $n - 1$ dimensions, équidistants et parallèles entre eux. Alors un cube à n dimensions peut être décomposé, au moyen de n systèmes pareils, normaux l'un à l'autre, en r^n cubes congrus (cellules).

Ainsi l'on trouve, pour $n = 2$ et $r = 5$, que le carré est décomposé en 25 carrés par 2 systèmes de 4 droites; ou, en posant $n = 3$, $r = 5$, le cube décomposé en 125 cubes par 3 systèmes de 4 plans. Remarquons aussi que la figure peut être regardée, de n manières différentes, comme agrégat de r^{n-1} séries linéaires de r cellules.

Imaginons encore qu'on ait distribué, aux r^n cellules, les nombres entiers de 1 à r^n , de sorte que toute série linéaire de nombres, dans toutes les n directions, donne la même somme s ; alors cet agrégat de nombres est ce que nous appelons un *cube magique à n dimensions et de l'ordre r* .

On aura

$$(1) \quad s = \frac{(1 + r^n)r^n}{2} : r^{n-1} = \frac{(1 + r^n)r}{2}.$$

Si, en outre, chacune des 2^{n-1} séries diagonales donne la somme s , nous dirons que le cube magique est *parfait*.

Avant de traiter le problème mentionné dans le titre de ce Mémoire, nous donnons préalablement quelques autres remarques sur les cubes magiques.

Si r est un nombre impair, on peut augmenter la perfection du cube magique, en ajoutant la condition que les séries joignant

⁽¹⁾ Voir par exemple mon Mémoire : *Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions* (Bull. Soc. math. de France, t. X, p. 172).

les milieux de deux figures limitantes opposées (arêtes, faces, solides, etc.) donnent la même somme s . Or le nombre des figures à p dimensions limitant un cube à n dimensions est

$$(2) \quad 2^{(n-p)} n \cdot p,$$

où

$$(3) \quad n \cdot p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p}.$$

Donc le nombre des séries joignant les milieux de deux figures opposées est

$$(4) \quad 2^{n-p-1} n \cdot p.$$

Et comme il y a $n-1$ espèces de figures limitantes, diverses par le nombre de leurs dimensions, il faudra prendre dans l'expression (4) pour p toutes les valeurs de 1 à $n-1$, pour obtenir le nombre entier des conditions particulières comprises en la condition susdite. (En posant $p=0$ on retrouverait le nombre des séries diagonales.) Ainsi, en posant pour le cube ordinaire $n=3$, on trouve que le nombre des séries joignant les milieux des arêtes ($p=1$) est 6, et que le même nombre relatif aux faces ($p=2$) est 3.

Mais l'ensemble de ces conditions (que nous appelons *conditions primaires*) ne suffit pas encore pour restreindre le nombre des cubes magiques, qui les remplissent, à un seul. Donc on peut encore ajouter des conditions que nous appelons *secondaires*. Ainsi, pour $n=2$, on peut ajouter la condition connue que l'on passe d'un nombre au suivant par le saut du cavalier.

Enfin remarquons que tout nombre compris dans un cube magique à n dimensions est situé également dans n séries linéaires, n^2 carrés, n^3 cubes ordinaires, enfin en n^s cubes à s dimensions.

2. Pour représenter dans le plan le cube magique à n dimensions, nous remplaçons chacune des r^n cellules à n dimensions, faisant partie du cube, par un petit carré (*élément*) qui renferme le nombre appartenant à la cellule. Alors on obtient sans difficulté les représentations suivantes (pour $r=3$) :

1° Le cube à 0 dimensions est l'élément lui-même, représenté par un simple carré (*fig. 1*).

2° Le cube à 1 dimension fait partie de la série des nombres entiers commençant par 1 et est représenté par une bande composée de r carrés (fig. 2).

3° Le cube à 2 dimensions (le carré proprement dit) est représenté par r bandes de l'espèce précédente (fig. 3).

4° Le cube à 3 dimensions (le cube ordinaire). — Pour le représenter dans le plan nous l'imaginons décomposé en r carrés de l'espèce précédente. Ces carrés, placés l'un après l'autre, forment une bande qui est l'exacte image du cube (fig. 4).

5° Tout de même le cube à 4 dimensions est décomposé en r cubes à 3 dimensions. Donc il est représenté par un carré composé de r bandes de l'espèce précédente.

Fig. 1. Fig. 2.

0

1
0
1

Fig. 3.

1		
0	2	2
1		

Fig. 4.

1		
0	2	2
1		
3		
3		

Fig. 5.

1							
0	2	2	4			4	
1							
3							
3							

On voit bien que cette méthode de représentation est susceptible d'être généralisée à volonté. Donc un cube magique à n dimensions est représenté par une bande, si n est impair, et par un carré, si n est pair. Alors la bande est composée de r carrés, et le carré de r bandes, et chacune de ces figures représente un cube à $(n - 1)$ dimensions, et ainsi de suite.

Il ne faut pas oublier que la décomposition d'un cube à n dimensions en cubes à $(n - 1)$ dimensions, impossible à l'égard de Géométrie, ne regarde ici qu'un ensemble de nombres, arrangé en forme de cube, arrangement qui donne bien lieu à la décomposition mentionnée. Aussi il importe peu d'imaginer que les nombres du cube magique à n dimensions soient renfermés en carrés plans au lieu de cellules à n dimensions.

Quant à l'image plane, chacun des petits carrés est situé dans n séries (ou bandes) rectilignes. Mais, tandis que dans le cube ces séries sont perpendiculaires l'une à l'autre, il faut les chercher dans l'image plane à l'aide des figures que nous venons de décrire. Ainsi on trouve que les groupes $(0, 1, 1)$, $(0, 2, 2)$.

(0, 3, 3), (0, 4, 4) forment des séries rectilignes de petits carrés. On voit cela immédiatement dans les *fig.* 2 et 3. Quant aux *fig.* 4 et 5, il faut imaginer une superposition de carrés plus grands qui sont composés de 9 cellules et séparés l'un de l'autre par une double ligne. Alors on voit que les cellules (0, 3, 3) ou (0, 4, 4) sont de même superposées l'une à l'autre et forment une série rectiligne. On peut choisir à volonté une autre cellule que (0) et l'on trouvera aisément les séries qui la renferment. On voit aussi que généralement l'image plane d'un cube à $n + 1$ dimensions, en comparaison de celui à n dimensions, contient une direction de plus, de sorte que cette image suffit complètement pour manifester l'égalité des sommes formées par les nombres de chaque série du cube magique. De même on ne rencontrera pas de difficultés à suivre les directions diagonales ou les autres directions qu'il faut prendre en considération dans le cube magique parfait de l'ordre impair.

Enfin il faut remarquer les deux théorèmes évidents :

1° *Toute image plane d'un cube magique à n dimensions et de l'ordre r , formée par un carré, représente également un cube magique à $2s$ dimensions et de l'ordre $r^{\frac{n}{2}+1-s}$, où $2s < n$.*

2° *Toute image plane d'un cube magique à n dimensions et de l'ordre r , formée par une bande, représente également un cube magique à $(2s + 1)$ dimensions et de l'ordre $r^{\frac{n+1}{2}-s}$, où $2s + 1 < n$.*

3. *Exemple.* — La méthode qui nous a servi à calculer l'exemple suivant ⁽¹⁾ sera publié dans un Mémoire qui suivra. Elle est différente des méthodes employées par d'autres géomètres (Sauveur, Hugel, Scheffler) pour obtenir des cubes magiques à trois dimensions. Elle donne généralement la solution de ce problème : *Étant donné un cube magique à n dimensions et de l'ordre r , trouver à son aide un cube magique à $n + 1$ dimensions et de l'ordre r .*

(1) Une série d'autres exemples, embrassant les cas : $n = 3$ et $r = 3$ à 9, $n = 4$ et $r = 4$ à 6, $n = 5$ et $r = 3$, est représentée par des Tableaux trop étendus pour être publiés ici.

Dans la résolution de ce problème il faut distinguer les cas :
 $r = 2\lambda + 1$, $r = 4\lambda + 2$, $r = 4\lambda$.

L'exemple suivant offre un cube magique parfait à quatre dimensions de l'ordre 3.

15 55 53	74 45 4	34 23 66
52 14 57	6 73 44	65 36 22
56 54 13	43 5 75	24 64 35
64 50 12	42 1 80	20 72 31
11 63 49	79 41 3	33 19 71
51 10 62	2 81 40	70 32 21
47 18 58	7 77 39	69 28 26
60 46 17	38 9 76	25 68 30
16 59 48	78 37 8	29 27 67

Cette figure représente encore, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, un carré magique de l'ordre 9.

Au lieu du Tableau précédent on peut aussi faire usage, pour le même cube magique, de trois autres représentations en double projection, que l'on trouve dans mon Mémoire : *Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. V, p. 1-7, fig. 2a, 2b et 3). En effet, on parvient aisément à placer les nombres aux sommets et aux milieux des arêtes, et, si l'on veut, aux milieux des faces.

Explications. — Voici d'abord les huit cubes magiques ordinaires limitant le cube à 4 dimensions :

1.

15 55 53	74 45 4	34 23 66
52 14 57	6 73 44	65 36 22
56 54 13	43 5 75	24 64 35

8.

47 18 58	7 77 39	69 28 26
60 46 17	38 9 76	25 68 30
16 59 48	78 37 8	29 27 67

2.

15 55 53	74 45 4	34 23 66
61 50 12	42 1 80	20 72 31
47 18 58	7 77 39	69 28 26

7.

56 54 13	43 5 75	24 64 35
51 10 62	2 81 40	70 32 21
16 59 48	78 37 8	29 27 67

3.

15 55 53
52 14 57
56 54 13
61 50 12
11 63 49
51 10 62
47 18 58
60 46 17
16 59 48

6.

34 23 66
65 36 22
24 64 35
20 72 31
33 19 71
70 32 21
69 28 26
25 68 30
29 27 67

4.

15 74 34
52 6 65
56 43 24
61 42 20
11 79 33
51 2 70
47 7 69
60 38 25
16 78 29

5.

53 4 66
57 44 22
13 75 35
12 80 31
49 3 71
62 40 21
58 39 26
17 76 30
48 8 67

Les cubes (1.8), (2.7), (3.6), (4.5) sont opposés l'un à l'autre.

Les huit axes diagonaux sont :

| 15.41.67 |, | 53.41.29 |, | 13.41.69 |, | 56.41.26 |,
| 34.41.48 |, | 66.41.16 |, | 35.41.47 |, | 24.41.58 |.

Les seize lignes joignant les milieux des arêtes opposées sont :

| 55.41.27 |, | 57.41.25 |, | 54.41.28 |, | 52.41.30 |,
| 23.41.59 |, | 22.41.60 |, | 64.41.18 |, | 65.41.17 |,
| 74.41. 8 |, | 4.41.78 |, | 75.41. 7 |, | 43.41.39 |,
| 61.41.21 |, | 12.41.70 |, | 63.41.20 |, | 51.41.31 |.

Les douze lignes joignant les centres des faces opposées sont :

| 14.41.68 |, | 36.41.46 |, | 42.41.40 |, | 80.41. 2 |,
| 45.41.37 |, | 44.41.38 |, | 5.41.77 |, | 6.41.76 |,
| 50.41.32 |, | 49.41.33 |, | 10.41.72 |, | 11.41.71 |.

Les quatre lignes joignant les centres des cubes opposés sont :

| 73.41. 9 |, | 63.41.19 |, | 1.41.81 |, | 79.41. 3 |.

Toutes les sommes le long des quatre directions principales des huit axes diagonaux et des lignes joignant les milieux des arêtes, faces et cubes opposés, font 123.

Outre cela, chacun des huit cubes limitants a un axe diagonal qui donne la même somme. Ces axes, avec les numéros donnés à ces cubes ci-dessus, sont :

(1) | 15.73.35 |, (2) | 53. 1.69 |, (3) | 13.63.47 |, (4) | 15.79.29 |,
(5) | 53. 3.67 |, (6) | 35.19.69 |, (7) | 13.81.29 |, (8) | 47. 9.67 |,

Ces axes forment ensemble une ligne continue et rentrant en elle-même.

Tout nombre est situé simultanément dans quatre séries linéaires (suivant les directions principales). Par exemple, ces séries sont, pour le nombre 54,

| 55.14.54 |, | 56.54.13 |, | 54. 5.61 |, | 54.10.59 |.

Puis tout nombre est situé dans six carrés, par exemple le nombre 54 dans les suivants :

15	55	53
52	14	57
56	54	13

56	54	13
51	10	62
16	59	48

55	50	18
14	63	46
54	10	59

55	45	23
14	73	36
54	5	61

56	54	13
43	5	75
24	64	35

54	5	61
10	81	32
59	37	27

Enfin, tout nombre est situé dans trois cubes à trois dimensions.

Une lettre d'Abel Transon.

La lettre qu'on va lire a été communiquée, à la Société, par M. C.-A. Laisant, qui s'est exprimé ainsi :

En feuilletant de vieilles notes, ces jours derniers, je viens de retrouver une lettre d'Abel Transon, lettre que j'eus l'honneur de recevoir de lui à l'époque où il publiait, dans les *Nouvelles Annales*, ses articles si remarquables sur le *Calcul directif*, c'est-à-dire en 1868.

Cette lettre est, en quelque sorte, un complément et un commentaire de la série des articles dont il s'agit; à ce titre, elle peut présenter un réel intérêt, au point de vue de l'histoire et de la doctrine des imaginaires. C'est ce qui m'a déterminé à la reproduire et à la communiquer à la Société mathématique de France.

On y retrouvera les qualités de clarté et de netteté philosophique qui caractérisaient ce grand esprit.

« Paris, 29 juin 1868.

» Vous avez bien raison de voir une analogie étroite entre les *Clefs* de M. Cauchy et les *Nombres directifs* d'Argand-Français-Mourey. Toutefois, le nombre directif correspond essentiellement à une *ligne unique* dont la longueur est mesurée par le *module* et la direction par l'*argument*. Ce nombre peut être remplacé par la ligne brisée à termes trigonométriques ou par toute autre ligne brisée terminée aux mêmes extrémités. Mais il y a un grand avantage à avoir *impliqué* dans une seule lettre la grandeur et la direction, au lieu de les expliciter en deux termes distincts. C'est un point tout à fait capital qui caractérise la doctrine de l'Algèbre directive; et, à vrai dire, je ne suis pas bien certain que M. Cauchy ait accepté aussi nettement que le supposent MM. Briot et Bouquet cette représentation du nombre imaginaire par un chemin oblique.

» Vous verrez, dans les articles que j'ai publiés, de nombreux exemples qui établissent l'avantage de cette conception. En voici un que je regrette d'avoir omis, car il est aussi simple que décisif.

» Si l'on fait le produit directif de plusieurs unités dirigées respectivement sous les inclinaisons $a, b, c, \dots$ et représentées par $1_a, 1_b, 1_c, \dots$, on a, d'après la règle de la multiplication, la valeur du produit donnée par

$$1_a 1_b 1_c \dots = 1_{a+b+c+\dots}$$

Or, en remplaçant maintenant chaque unité inclinée par une ligne

brisée en cosinus et sinus, on a immédiatement le théorème de Moivre

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \dots = \cos(a + b + \dots) + i \sin(a + b + \dots).$$

» Ensuite, il est bien vrai aussi qu'en considérant essentiellement le nombre dit *imaginaire*, sous sa forme usuelle $a + b\sqrt{-1}$; considérant, en outre, a et b comme une ordonnée et une abscisse, et, par suite, ce nombre comme déterminant, à la façon de Descartes, un point quelconque du plan; il est bien vrai, dis-je, qu'on est naturellement conduit à se demander si l'addition d'un nouveau terme affecté d'un nouveau coefficient de perpendicularité ne conduira pas à un point hors du plan, à un point quelconque de l'espace. Cette extension, que vous avez bien aperçue, est, comme vous le savez aussi, le principe de la théorie des quaternions de M. Hamilton. Sans avoir imaginé cette théorie, les inventeurs du calcul directif, Argand, Français et Mourey, eux aussi, ont entrevu une extension de la doctrine à une certaine Géométrie de l'espace.

» Pour moi, j'ai voulu, dans l'exposition du calcul directif, écarter complètement ce point de vue. J'ai voulu montrer que le *chemin incliné sur le plan* réalise le symbole imaginaire de l'Algèbre; et qu'ainsi tous les nombres requis par les nécessités du calcul, le nombre fractionnaire, le nombre positif et le nombre négatif, et enfin le nombre dit *imaginaire* sont procurés à l'Algèbre par la Géométrie, avec le même caractère de nécessité!... Résultat très important à nos yeux, parce qu'il en doit suivre une réforme dans l'enseignement de l'Algèbre. Et à ceux qui m'ont souvent objecté : mais pourquoi ne sortez-vous pas du plan? je répondais : ce n'est pas la Géométrie à trois dimensions qui est en souffrance, qui a des symboles imaginaires, inexpliqués; c'est l'Algèbre. Donc, quand la Géométrie vient au secours de l'Algèbre pour combler une lacune, l'Algèbre serait mal venue de répondre à la Géométrie : Construisez *d'abord* des symboles applicables à l'espace; c'est alors seulement que j'examinerai si, comme vous le dites, il y a vraiment des nombres dont le carré soit négatif, ce que j'ai toujours nié jusqu'ici. . . .

» En d'autres termes, le nouveau symbole de perpendicularité nécessaire pour sortir du plan me paraît une invention, nullement

dénuée d'utilité et d'opportunité sans doute; mais aussi, inévitablement marquée de quelque arbitraire. Or, je tenais précisément à établir que la correspondance du chemin incliné de la Géométrie avec le symbole imaginaire des algébristes est aussi naturelle que la correspondance de la divisibilité indéfinie des grandeurs linéaires avec la génération du nombre fractionnaire; ou aussi naturelle que la correspondance des deux chemins opposés de la Géométrie cartésienne avec les nombres dits *positifs* et *négatifs* de l'Algèbre.

» Pour m'éclairer complètement à ce sujet, pendant que je composais la série des articles des *Nouvelles Annales*, je me suis procuré une Thèse de M. Allégret sur les quaternions. Sans m'être assimilé la théorie, qui n'est peut-être pas exposée dans cette thèse d'une façon bien lucide, j'en ai vu assez pour, d'une part, me confirmer dans l'opinion ci-dessus, et me décider à ne faire aucune mention des quaternions à l'occasion de *la vraie théorie des quantités dites imaginaires*. Mais j'ai vu, en même temps, que cette théorie des quaternions avait déjà donné des résultats intéressants et, tout au moins, des expressions nouvelles de propriétés déjà connues de la Géométrie des lignes et des surfaces.

» Ainsi, bien loin de vous détourner de cette étude, je ne crains pas d'exprimer la conviction que cette théorie pourra donner des résultats vraiment nouveaux. N'est-il pas évident que, si l'on peut impliquer dans une seule lettre la grandeur et la direction d'un chemin oblique de l'espace, c'est-à-dire représenter par une seule lettre la fonction dite *quaternion*, sauf à procéder tout le calcul qui dérive de cette théorie, une équation entre deux variables suffira pour exprimer dans l'espace des lois de transformation des figures?...

» ABEL TRANSON. »

Sur les involutions d'espèce quelconque;

par M. MAX GENTY.

L. M. Guccia définit, dans ses *Leçons de Géométrie supérieure*, les involutions de degré n et d'espèce k . Une pareille involution, qu'il désigne par le symbole I_n^k , est une série linéaire k fois indéterminée de groupes de n points pris sur une droite ou

sur une courbe unicursale donnée; c'est-à-dire, telle que k points arbitraires de la droite ou de la courbe déterminent un groupe unique de n points appartenant à l'involution.

Analytiquement, une équation de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_{k+1} U_{k+1} = 0,$$

dans laquelle les λ_i sont des paramètres arbitraires, et les U_i des polynômes de degré n par rapport à la variable t , au moyen de laquelle peuvent s'exprimer rationnellement les coordonnées de la courbe unicursale donnée, représente une involution de degré n et d'espèce k . Cette définition de l'involution I_n^k n'est autre que la traduction analytique de la définition géométrique donnée primitivement.

2. De la définition précédente, nous déduisons immédiatement qu'il existe une infinité de groupes d'une involution I_n^k possédant en un point donné un point multiple d'ordre $k' < k$. De plus, tous ces groupes appartiennent évidemment à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$ qui est dite *adjointe* au point multiple donné.

En particulier, un point donné considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k . Nous voyons, d'après cela, qu'il doit exister un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant un point multiple d'ordre $k + 1$. Nous allons rechercher ce nombre, que nous désignerons par u_n^k .

3. Nous emploierons dans ce but une démonstration plus courte que celle de M. Guccia. Le seul lemme analytique auquel nous aurons recours, et qui nous servira pour toutes les démonstrations qui suivent, est le principe de correspondance de Chasles que nous énonçons une fois pour toutes :

Si deux séries de points X et Y se correspondent algébriquement, de telle sorte qu'à un point X correspondent β points Y et à un point Y, α points X, le nombre des coïncidences des points X et Y sera $\alpha + \beta$.

Soit A un point donné de la courbe unicursale. Ce point considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k , et, par conséquent, $n - k$ points M différents de A et appartenant à ce groupe. Il s'agit de déterminer, quand A parcourt la courbe donnée, le nombre des coïncidences du point A

avec un des points M. Un des points M étant donné, les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} possédant u_{n-1}^{k-1} points multiples d'ordre k . Les points A et M se correspondent donc algébriquement entre eux, de telle façon qu'à un point A correspondent $n - k$ points M, et à un point M, u_{n-1}^{k-1} points A.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, le nombre des coïncidences du point A avec un des points M est $u_{n-1}^{k-1} + n - k$.

Nous avons donc l'équation de récurrence

$$u_n^k = u_{n-1}^{k-1} + n - k$$

qui, au moyen de l'équation initiale évidente

$$u_{n-k}^0 = n - k,$$

nous donne

$$u_n^k = (k+1)(n-k).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Dans une involution de degré n et d'espèce k , il existe $(k+1)(n-k)$ groupes possédant un point multiple d'ordre $k+1$.*

4. Nous allons maintenant démontrer que, si $n \geq 2k$, il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant k points doubles et nous allons rechercher ce nombre que nous désignerons par v_n^k . Soit A un point donné; les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} . Il existe v_{n-1}^{k-1} groupes de cette dernière involution possédant $k-1$ points doubles. En dehors de ces points doubles et du point A, tous ces groupes déterminent $v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points M correspondants à A, et il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M. Or, rien ne différenciant le point A des points M, à un point M correspondent également $v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points A. Donc le nombre des coïncidences est

$$2v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1).$$

Chacune de ces coïncidences fournit un groupe de l'involution I_n^k possédant k points doubles.

Mais on voit facilement que nous obtiendrons k fois le même groupe en faisant coïncider successivement le point A avec chacun

des k points doubles. Nous avons donc, en définitive, l'équation de récurrence suivante

$$v_n^k = \frac{2}{k} v_{n-1}^{k-1} (n - 2k + 1),$$

qui, avec l'équation initiale

$$v_{n-k+1}^1 = 2(n - k),$$

donne

$$v_n^k = \frac{2^k (n - k)!}{k! (n - 2k)!}.$$

Nous avons donc l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Dans toute involution de degré n et d'espèce k , si $n \geq 2k$, il existe $\frac{2^k (n - k)!}{k! (n - 2k)!}$ groupes de cette involution possédant k points doubles.*

Ce théorème a été démontré par M. Émil Weyr, et M. Guccia l'énonce sans en donner de démonstration.

§. Nous allons continuer dans le même ordre d'idées et démontrer qu'il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k' + 1$ et $k - k' + 1$, k' étant un nombre quelconque plus petit que k .

Appelons X_1 le nombre cherché; les groupes de I_n^k ayant en un point donné A un point multiple d'ordre h' appartiennent à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$. Il existe $(k - k' + 1)(n - k)$ groupes de cette involution possédant un point multiple d'ordre $k - k' + 1$. En dehors de ces points multiples et du point A , tous ces groupes déterminent donc $(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$ points M qui correspondent au point A . Il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec les points M . Or le point M étant donné, les groupes de I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} , et il existe un nombre X_2 de groupes de cette involution possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à k' et $k - k' + 1$.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, nous avons

$$X_1 = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1) + X_2.$$

Nous obtiendrons, par des raisonnements analogues,

$$X_2 = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1) + X_3,$$

X_3 étant le nombre des groupes d'une involution I_{n-2}^{k-2} possédant

deux points multiples d'ordres $k' - 1$ et $k - k' + 1$. Nous arriverons successivement ainsi à l'équation finale

$$X_{k'+1} = (n - k) (n - k - 1) (k - k' + 1),$$

car $X_{k'+1}$ n'est autre que le nombre des combinaisons des groupes d'une involution possédant un point simple et un point multiple d'ordre $k - k' + 1$. Nous déduirons donc, par addition des équations précédentes,

$$X_1 = (k' + 1) (k - k' + 1) (n - k) (n - k - 1).$$

Nous avons, par suite, cette proposition :

THÉORÈME III. — *Dans une involution de degré n et d'espèce k , il existe $(k' + 1)(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$ groupes possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k' + 1$ et $k - k' + 1$.*

6. Si nous appliquons le théorème I à l'involution particulière I_n^{n-1} , nous en déduisons qu'une pareille involution a n points multiples d'ordre n . Représentons par $t_1, t_2, \dots, t_n$ les n valeurs du paramètre t qui correspondent aux n points de l'involution I_n^{n-1} , et désignons, pour abréger, par $[t]^n, [t]^{n-1}, [t]^{n-2}, \dots$ la somme des produits n à $n, n - 1$ à $n - 1, n - 2$ à $n - 2, \dots$ de ces n quantités t_i . On voit facilement que l'involution I_n^{n-1} pourra être représentée par une équation de la forme

$$(1) \quad A_0[t]^n + A_1[t]^{n-1} + \dots + A_{n-1}[t]^1 + A_n = 0.$$

Les valeurs de t qui correspondent aux n points multiples s'obtiendront en faisant, dans l'équation (1),

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = z.$$

Ces n valeurs de t sont donc les racines de l'équation

$$(2) \quad A_0 z^n + C_n^1 A_1 z^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} A_{n-1} z + A_n = 0,$$

C_n^i représentant le nombre des combinaisons de n objets i à i . Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de l'équation (2); en prenant pour les quantités z_i les mêmes notations que pour les quantités t_i , nous tirons de l'équation précédente

$$\begin{aligned} A_0[z]^1 &= -C_n^1 A_1, \\ A_0[z]^2 &= C_n^2 A_2, \\ &\dots\dots\dots \\ A_0[z]^{n-1} &= (-1)^{n-1} C_n^{n-1} A_{n-1}, \\ A_0[z]^n &= (-1)^n A_n. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans le premier membre de l'équation (1), les quantités $[t]^i$ par les $[z]^i$ correspondants; nous obtenons, au facteur Λ_0 près,

$$\Lambda_0[(-1)^n \Lambda_0 \Lambda_n + (-1)^{n-1} C_n^1 \Lambda_1 \Lambda_{n-1} + \dots - C_n^1 \Lambda_1 \Lambda_{n-1} + \Lambda_0 \Lambda_n].$$

Cette expression s'annule identiquement dans le cas où n est impair; nous obtenons donc le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Toute involution d'ordre n et d'espèce $n - 1$ présente n points multiples d'ordre n . Dans le cas où n est impair, ces points multiples appartiennent à un même groupe de l'involution.*

M. Appell a démontré ce théorème dans le cas de $n = 3$ et il l'a appliqué fort élégamment à la recherche des propriétés polaires des cubiques gauches. On conçoit que le théorème IV puisse conduire à un grand nombre de propriétés géométriques.

Prenons, par exemple, une conique Γ et un point A de cette courbe. Tous les cercles passant par ce point ont, en commun avec Γ , trois points M , autres que A , formant évidemment une involution I_3^2 . Appliquons à cette involution le théorème IV; nous en déduisons la propriété suivante qui est bien connue :

Par un point A d'une conique Γ , on peut mener à cette courbe trois cercles osculateurs dont les points de contact M_1, M_2, M_3 sont différents de A . Ces trois points sont situés avec le point A sur un même cercle.

7. Les théorèmes que nous venons de démontrer dans les paragraphes précédents permettent de déterminer immédiatement le nombre des surfaces algébriques de degré donné soumises à des conditions déterminées et ayant, avec une courbe gauche unicursale donnée, un contact d'ordre supérieur.

Soit une courbe gauche unicursale de C_n de degré n . Le théorème I nous donne les nombres suivants :

Nombre de plans tangents menés à C_n par une droite donnée D :

$$2(n-1).$$

Si la droite D a r points communs avec C_n , le nombre précédent doit être diminué de $2r$.

Nombre de plans osculateurs menés à C_n par un point donné P :

$$3(n-2).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de la courbe C_n , le nombre précédent doit être diminué de $3r$.

Nombre de plans surosculateurs à la courbe C_n :

$$4(n-3).$$

Nombre de sphères osculatrices à C_n et passant par un point donné P :

$$4(2n-3).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de C_n , le nombre précédent doit être diminué de $4r$.

Nombre de sphères surosculatrices à C_n :

$$5(2n-4).$$

Le théorème II nous conduira également, et avec autant de facilité, aux nombres suivants :

Nombre de plans tritangents à une courbe C_n :

$$\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5).$$

Nombre de sphères quadritangentes à C_n :

$$\frac{2}{3}(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7).$$

Enfin, le théorème III nous conduira, de la même façon, aux nombres suivants :

Nombre de plans à la fois osculateurs et tangents à C_n :

$$6(n-3)(n-4).$$

Nombre de sphères à la fois osculatrices et tangentes à C_n :

$$8(2n-4)(2n-5).$$

Nous arrêtons cette énumération un peu longue, en faisant remarquer avec quelle facilité la méthode que nous venons de donner permet d'arriver à la détermination de ces nombres.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. DESIRÉ ANDRÉ.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la détermination du point le plus probable, défini sur une carte par des recoupements non convergents.*

M. Humbert : *Sur une certaine transformée homographique de la surface des ondes.*

M. Max Genty : *Sur les involutions d'espèce quelconque.*

M. Humbert : *Involutions qui peuvent exister sur des courbes de genre quelconque.*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Stéphane Mangeot, présenté par MM. D. André et Raffy; M. Caronnet, présenté par MM. Darboux et Raffy; M. le prince Roland Bonaparte, présenté par MM. Poincaré et d'Ocagne; M. von Koch, présenté par MM. D. André et L. Lévy.

Communications :

M. Lemoine : *Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème.*

M. d'Ocagne : *Démonstration nouvelle du théorème de Fermat généralisé.*

M. Fouret : *Sur quelques relations caractéristiques entre les dérivées partielles de certaines fonctions symétriques de plusieurs variables.*

M. von Koch : *Sur les déterminants d'ordre infini.*

M. Raffy : *Sur la détermination des éléments linéaires doublement harmoniques.*

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Cellérier, présenté par MM. Poincaré et Sarrau; M. Fehr, présenté par MM. Laisant et Raffy; M. Paul Genty, présenté par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. D. André : *Sur le partage en quatre groupes des permutations des n premiers nombres.*

M. Genty adresse, par l'intermédiaire de M. Laisant, un Mémoire de Géométrie vectorielle sur la théorie générale des surfaces.

M. Haton de la Goupillière : *Centre des moyennes distances des centres de courbure successifs.*

MM. Laisant et Fourret présentent quelques observations sur cette Communication.

M. Demoulin : *Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires.*

M. D. André présente quelques observations sur cette Communication.

M. LUCIEN LÉVY donne quelques explications sur le Mémoire, extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dont il offre un exemplaire à la Société.

Le théorème suivant, déjà énoncé à une séance précédente, s'explique facilement par des considérations géométriques.

Si l'on fait tourner autour de son axe une surface-moulure de Monge dont le noyau est un cylindre de révolution, toutes les positions successives de cette surface constituent une famille d'un système triplement orthogonal.

On s'en rend compte aisément en remarquant que les sections

d'une de ces surfaces par un plan perpendiculaire à l'axe sont des développantes de cercles tous projetés orthogonalement suivant un même cercle, que les tangentes à ces cercles sont normales à toutes les développantes de leur plan, et, par suite, que les plans tangents au cylindre de révolution constituent une famille orthogonale à la famille précédente. Comme un quelconque des plans coupe une quelconque des surfaces suivant une de ses lignes de courbure, le système triplement orthogonal existe.

Il n'a pas été possible d'interpréter aussi simplement le résultat suivant, dont le Mémoire contient la démonstration analytique :

Si les cylindres de révolution, qui ont pour bases les diverses lignes de courbure circulaires d'un périsphère symétrique, interceptent une longueur constante sur une droite Δ du plan de symétrie du périsphère, la translation parallèle à Δ de ce périsphère donnera naissance à une série de surfaces qui constitueront une des trois familles d'un système triplement orthogonal.

Rappelons qu'un *périsphère symétrique* est une surface enveloppe de sphères à directrice plane.

M. CARONNET fait la Communication suivante :

Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur une surface.

Considérons sur une surface une famille quelconque de courbes, et soit

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$$

son élément linéaire, quand on la rapporte à ces courbes (u) et à leurs trajectoires orthogonales (v).

Les rayons de courbure géodésique des lignes coordonnées ont pour expressions

$$\begin{aligned} \varphi_{gu} &= -\frac{AC}{\frac{\partial A}{\partial v}} = \frac{A}{r}, \\ \varphi_{gv} &= \frac{AC}{\frac{\partial C}{\partial u}} = \frac{C}{r_1}; \end{aligned}$$

on les obtient au moyen de la formule générale connue (1)

$$\frac{ds}{\partial_g} = d\omega + r du + r_1 dv;$$

d'autre part, les coordonnées des centres de courbure géodésique G, G' , rapportés au trièdre de la surface (M, xyz) s'écrivent

$$(G) \quad x = 0, \quad y = \partial_{gu}, \quad z = 0;$$

$$(G') \quad x = -\partial_{gv}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Ceci posé, soit une famille (F) de trajectoires isogonales des courbes (u).

Les courbes de cette famille, coupant les lignes coordonnées sous le même angle constant ω , leur courbure géodésique est définie par

$$\frac{1}{\partial_g} = \frac{\cos \omega}{\partial_{gu}} + \frac{\sin \omega}{\partial_{gv}},$$

et les coordonnées du centre de courbure géodésique Γ relatif à celle de ces courbes qui passe en M sont

$$x = -\partial_g \sin \omega, \quad y = \partial_g \cos \omega, \quad z = 0.$$

Nous voyons, par conséquent, que le point Γ appartient à la droite GG' , qui a d'ailleurs pour équation

$$\frac{x}{-\partial_{gv}} + \frac{y}{\partial_{gu}} = 1.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

En chaque point d'une surface, les centres de courbure géodésique de toutes les familles (F) de trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes (C) sont alignés suivant une droite (D).

Remarque I. — Supposons que deux des familles (F) soient formées de géodésiques, la droite (D) sera rejetée à l'infini; toutes les trajectoires isogonales seront des géodésiques et la surface donnée sera développable.

Nous retrouvons ainsi la proposition de Liouville.

(1) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*.

Remarque II. — Parmi toutes les trajectoires qui passent en M, il y en a une, et en général une seule, qui a son plan osculateur normal à la surface en ce point; elle a pour tangente la perpendiculaire à (D) issue de M.

S'il en existait deux jouissant de cette propriété, il en serait de même pour toutes les autres.

Remarque III. — Supposons que les courbes de deux familles (F) soient des cercles géodésiques de rayon constant, égal à ρ pour l'une, égal à ρ' pour l'autre. Dans ces conditions, la droite (D) est invariablement liée au trièdre de la surface, et toutes les trajectoires isogonales sont des cercles géodésiques, dont le rayon est le même quand on les associe par familles.

En remarquant que, parmi ces trajectoires, il existe une famille de géodésiques, et rapportant la surface à ces courbes et à leurs trajectoires orthogonales, on obtient pour son élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}} dv^2,$$

Cette surface a sa courbure totale constante et égale à $-\frac{1}{a^2}$.

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Remarques sur les fonctions homogènes.

Une fonction homogène de plusieurs variables

$$u = f(x_1, x_2, \dots)$$

est définie, comme on le sait, par la relation

$$(1) \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots).$$

Le degré m de la fonction peut être positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable. On pourrait même le supposer imaginaire.

Le théorème d'Euler se déduit de l'identité (1) et s'exprime par la formule

$$(2) \quad x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots = m f(x_1, x_2, \dots).$$

Ce théorème est réciproque, c'est-à-dire que, si la formule (2) est vérifiée identiquement, la fonction f est homogène.

D'autre part, si nous effectuons l'opération ()⁽¹⁾ sur toutes les fonctions que renferment les p premières relations (7), nous aurons, en vertu de la formule (6),

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} u^{(1)} = v^{(1)} + w^{(1)} + \dots, \\ u^{(1)} + u^{(2)} = mv^{(1)} + nw^{(1)} + \dots, \\ 2u^{(2)} + u^{(3)} = m(m-1)v^{(1)} + n(n-1)w^{(1)} + \dots, \\ \dots\dots\dots \\ (p-1)u^{(p-1)} + u^{(p)} = m(m-1)\dots(m-p+2)v^{(1)} \\ \quad + n(n-1)\dots(n-p+2)w^{(1)} + \dots. \end{array} \right.$$

La comparaison des systèmes (10) et (11) montre que mv , nw , ... et $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, ... s'obtiennent par le même système d'équations. Donc

$$v^{(1)} = mv, \quad w^{(1)} = nw, \quad \dots,$$

c'est-à-dire, d'après la réciproque du théorème d'Euler, que toutes les fonctions v , w , ... sont homogènes et respectivement de degrés m , n , ...

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction u soit décomposable en une somme de p fonctions homogènes est exprimée par la relation (9).

Quand on a reconnu que cette condition est remplie, et qu'on a déterminé les degrés m , n , ... il est possible d'obtenir les fonctions v , w , ... d'après la définition même des fonctions homogènes. Si, en effet, dans la fonction $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$ nous substituons à λ des valeurs λ_1 , λ_2 , ..., λ_p quelconques, et si nous appelons u_1 , u_2 , ..., u_p les résultats de ces substitutions, nous aurons

$$\begin{array}{l} u_1 = \lambda_1^m v + \lambda_1^n w + \dots \\ u_2 = \lambda_2^m v + \lambda_2^n w + \dots \\ \dots\dots\dots \\ u_p = \lambda_p^m v + \lambda_p^n w + \dots, \end{array}$$

système qui déterminera les p fonctions v , w , ...

Comme application, si nous considérons simplement une fonction de deux variables x , y , décomposable en une somme de deux fonctions homogènes, la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ u^{(1)} & m & n \\ u^{(2)} & m(m-1) & n(n-1) \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$u^{(2)} + (1-m-n)u^{(1)} + mnu = 0.$$

Si donc nous avons

$$(12) \quad a^{(2)} + au^{(1)} + bu = 0,$$

il faudra écrire

$$m + n = 1 - a, \quad mn = b,$$

d'où

$$(13) \quad m = \frac{1}{2}(1 - a + \sqrt{a^2 - 2a - 4b}), \quad n = \frac{1}{2}(1 - a - \sqrt{a^2 - 2a - 4b}).$$

L'équation (12) pouvant s'écrire

$$(14) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + bu = 0,$$

nous voyons donc que l'intégrale de cette équation aux dérivées partielles du second ordre est

$$(15) \quad u = F(x, y) + G(x, y),$$

F et G étant deux fonctions homogènes arbitraires dont les degrés sont respectivement m et n déterminés par les relations (13).

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. DEMOULIN : *Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données.*

M. FOURET transmet une Note de M. R. GODEFROY *Sur les courbes de Lamé.*

M. HUMBERT traite *Des involutions sur les courbes algébriques*. Il montre que, abstraction faite de la surface de Steiner, il n'existe pas de surface algébrique engendrée par des coniques et telle qu'en chacun de ses points passe plus d'une conique.

M. D'OCAGNE fait *Sur les suites récurrentes* une Communication qui se résume ainsi :

Lorsqu'une suite récurrente est définie, en outre des p termes initiaux $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$, par la relation

$$Y_n + A_1 Y_{n-1} + A_2 Y_{n-2} + \dots + A_p Y_{n-p} = 0,$$

on dit qu'elle répond à l'échelle d'ordre p ($A_1, A_2, \dots, A_p$).

Soit

$$\varphi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \dots + A_p = 0$$

l'équation génératrice de cette suite.

Si l'on pose

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \dots + A_i,$$

$$\psi(x) = Y_{p-1} + Q_1(x)Y_{p-2} + \dots + Q_{p-1}(x)Y_0,$$

on a ce théorème :

Lorsque les équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune α , la suite donnée répond à l'échelle d'ordre $p-1$ [$Q_1(\alpha), Q_2(\alpha), \dots, Q_{p-1}(\alpha)$].

On peut ainsi réduire l'échelle d'une suite donnée à sa plus simple expression.

Après avoir fait voir, au moyen de la considération des *suites fondamentales*, qu'il a introduites dans cette théorie ⁽¹⁾, que la série formée par les termes d'une suite récurrente est convergente lorsque l'équation génératrice n'a que des racines de module inférieur à l'unité, M. d'Ocagne démontre que cette condition suffisante est également nécessaire *lorsque l'échelle de la suite a été réduite à sa plus simple expression* ⁽²⁾.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires; par
M. A. DEMOULIN.

1. Ce complexe, qui est du second ordre, a déjà été l'objet d'une étude approfondie, due à Painvin (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, p. 49). Nous nous proposons d'en faire

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. III, p. 78.

⁽²⁾ Ce résultat se trouve démontré dans un Mémoire développé sur les suites récurrentes qui est en voie de publication.

connaître ici un certain nombre de propriétés. A cet effet, nous démontrerons d'abord deux théorèmes concernant les surfaces du second ordre.

THÉOREME I. — *Étant donnés, dans l'espace, des points P_i , au nombre de n , désignons par p_i la distance du point P_i à un plan mobile P . Cela posé, si l'on a*

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i p_i^2 = \rho,$$

les quantités a_i et ρ étant des constantes, le plan P enveloppera une surface du second ordre.

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées rectangulaires du point P_i et

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan P . On a

$$p_i = \frac{ux_i + vy_i + wz_i + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

d'où, en substituant dans (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i (ux_i + vy_i + wz_i + 1)^2 = \rho (u^2 + v^2 + w^2),$$

ou encore, tous calculs faits,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^2 \left(-\rho + \sum_1^n a_i x_i^2 \right) \\ & + v^2 \left(-\rho + \sum_1^n a_i y_i^2 \right) + w^2 \left(-\rho + \sum_1^n a_i z_i^2 \right) \\ & + 2uv \sum_1^n a_i y_i z_i + 2wu \sum_1^n a_i z_i x_i + 2vw \sum_1^n a_i x_i y_i \\ & + 2u \sum_1^n a_i x_i + 2v \sum_1^n a_i y_i + 2w \sum_1^n a_i z_i + \sum_1^n a_i = 0. \end{aligned} \right.$$

L'enveloppe du plan P est donc une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la quadrique centrale d'inertie relative à des masses a_i placées aux points P_i .

Ces considérations s'appliquent évidemment au cas où les masses a_i seraient en nombre infini et formeraient une matière continue.

L'équation (2) montre que si ρ varie, les quantités a_i restant constantes, l'équation (1) représente une famille de quadriques homofocales.

THÉORÈME II. — *Étant donnée la quadrique*

$$(3) \quad \begin{cases} au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv \\ + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0, \end{cases}$$

il existe une infinité de relations linéaires entre les carrés des distances d'un plan tangent quelconque à dix points fixes, pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Faisons, dans l'équation (2), $n = 10$, et identifions-la avec l'équation (3); nous aurons ainsi les dix équations linéaires

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_1^{10} a_i x_i^2 = a + \rho, & \sum_1^{10} a_i y_i^2 = a' + \rho, \\ \sum_1^{10} a_i z_i^2 = a'' + \rho, & \dots, \quad \sum_1^{10} a_i = d. \end{cases}$$

Ces équations seront toujours compatibles, car, si le déterminant des coefficients des inconnues était nul, les dix points P_i seraient situés sur une surface du second ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous pourrions donc toujours déduire des équations (4) un système de valeurs des inconnues $a_1, \dots, a_{10}$. Ces valeurs dépendront des coefficients de l'équation (3) et de la quantité arbitraire ρ . Cela posé, entre les distances des dix points P_i à tout plan tangent de la quadrique (3), il existera la relation

$$(5) \quad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho.$$

Si l'on fait $\rho = 0$, on obtient la relation linéaire et *homogène*

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = 0.$$

2. Pour la facilité du langage, nous donnerons au complexe actuel le nom de *complexe de Painvin*. Ce complexe jouit de la propriété suivante :

Un complexe de Painvin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés d'une droite quelconque du complexe à dix points pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Soient D une droite quelconque du complexe de Painvin relatif à la quadrique (3) et P, P' les plans tangents rectangulaires que l'on peut mener à cette quadrique par la droite D. Soient p_i, p'_i, d_i les distances du point P_i respectivement au plan P, au plan P' et à la droite D. La formule (5) donne

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \varphi, \quad \sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \varphi,$$

d'où, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i (p_i^2 + p_i'^2) = 2\varphi.$$

Or

$$p_i^2 + p_i'^2 = d_i^2,$$

par suite

$$(6) \quad \sum_1^{10} a_i d_i^2 = 2\varphi.$$

Le théorème est donc démontré. Si $\varphi = 0$, la relation (6) se réduit à

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 0.$$

3. Les considérations qui précèdent vont nous permettre de trouver l'équation du complexe de Painvin par rapport à des axes rectangulaires quelconques. Soient ($\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$) les coordonnées pluckériennes ⁽¹⁾ d'une droite D du complexe. La distance d_i

(1) Soient (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées de deux points quelconques de la droite D. Nous poserons

$$\begin{aligned} \alpha &= x' - x'', & \beta &= y' - y'', & \gamma &= z' - z'', \\ p &= z' y'' - z'' y', & q &= x' z'' - x'' z', & r &= y' x'' - y'' x'. \end{aligned}$$

du point $P_i(x_i, y_i, z_i)$ à cette droite est donnée par la formule

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d_i^2 = & x_i^2 (\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2 (\gamma^2 + \alpha^2) + z_i^2 (\alpha^2 + \beta^2) \\ & - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i \\ & + 2x_i(q\gamma - r\beta) + 2y_i(r\alpha - p\gamma) \\ & + 2z_i(p\beta - q\alpha) + p^2 + q^2 + r^2. \end{aligned}$$

Portant, dans (6), la valeur de d_i^2 et tenant compte des relations (4), nous obtiendrons l'équation du complexe, à savoir

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') \\ & - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' \\ & + 2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0. \end{aligned} \right.$$

Si les axes des coordonnées coïncident avec les axes principaux de la quadrique (3),

$$b = b' = b'' = c = c' = c'' = 0,$$

et l'équation (7) devient

$$\alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0.$$

C'est, aux notations près, l'équation obtenue par Painvin dans le Mémoire cité.

4. La forme de l'équation (7) montre que :

Si une congruence est composée des droites communes aux complexes de Painvin de deux quadriques quelconques, représentées en coordonnées tangentielles par les équations

$$\Sigma = 0, \quad \Sigma' = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$\Sigma + \rho \Sigma' = 0,$$

dans laquelle ρ est un paramètre variable.

5. Soit

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

l'équation d'un complexe quadratique quelconque.

Considérons tous les complexes quadratiques définies par l'é-

quation

$$(8) \quad f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) + \rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Chacun de ces complexes renferme évidemment celles des droites du complexe

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

qui sont isotropes. Il suit de là que *les coniques, situées dans un même plan et relatives aux complexes (8), sont homofocales; et que les cônes de même sommet, relatifs aux complexes (8), sont homocycliques.*

Cela posé, soit la famille de quadriques homofocales

$$(a + \rho)u^2 + (a' + \rho)v^2 + (a'' + \rho)w^2 \\ + 2b'vw + 2b''wu + 2c'u + 2c'v + 2c''w + d = 0.$$

Les complexes de Painvin relatifs à ces quadriques ont pour équation

$$\alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') \\ - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' \\ + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' + 2(p\beta - q\alpha)c'' \\ + (p^2 + q^2 + r^2)d + 2\rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0.$$

Cette équation rentrant dans le type de l'équation (8), nous pouvons énoncer ce théorème :

Les coniques, relatives à un plan, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homofocales.

Les cônes, relatifs à un point, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homocycliques.

6. Nous avons vu (n° 2) que le complexe de Painvin d'une quadrique quelconque

$$\sum_{i=1}^{10} a_i p_i^2 = \rho$$

est défini par l'équation

$$\sum_{i=1}^{10} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Cela posé, soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \varphi',$$

$$\sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \varphi''$$

les équations de deux quadriques Q' , Q'' , homofocales à Q . Cherchons le complexe des droites D par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires P' , P'' tangents, l'un P' à la quadrique Q' , l'autre P'' à la quadrique Q'' . Soient p'_i , p''_i , d_i les distances du point P_i aux plans P , P' et à la droite D . On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \varphi', \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \varphi'',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2) = \varphi' + \varphi''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 = d_i^2,$$

par conséquent

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = \varphi' + \varphi''.$$

Si $\varphi' + \varphi'' = 2\varphi$, cette équation représente le complexe de Painvin de la quadrique Q . De là ce théorème :

Le complexe de Painvin relatif à une quadrique Q peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des droites d'intersection de deux plans rectangulaires P' , P'' respectivement tangents à deux quadriques Q' , Q'' , homofocales à Q .

7. Le théorème 1 permet de démontrer simplement le théorème bien connu de Monge concernant le lieu du sommet O d'un trièdre trirectangle circonscrit à une surface du second ordre.

Soient p'_i , p''_i , p'''_i les distances du point P_i aux faces de ce trièdre et r_i la distance OP_i . On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \varphi, \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \varphi, \quad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \varphi,$$

d'où, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = 3\rho.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2;$$

par suite,

$$(9) \quad \sum_1^{10} a_i r_i^2 = 3\rho.$$

Cette équation représente une sphère, ce qui démontre le théorème de Monge. Pour trouver l'équation de cette sphère en coordonnées cartésiennes, appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées rectangulaires du point P_i et (x, y, z) celles du point O ; on a

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

d'où, en substituant dans (9),

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) \sum_1^{10} a_i - 2x \sum_1^{10} a_i x_i - 2y \sum_1^{10} a_i y_i - 2z \sum_1^{10} a_i z_i \\ + \sum_1^{10} a_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 3\rho = 0, \end{aligned}$$

ou encore, en tenant compte des formules (4),

$$(x^2 + y^2 + z^2)d - 2xc - 2yc' - 2zc'' + a + a' + a'' = 0.$$

8. Le théorème de Monge est susceptible de la généralisation suivante, due à Bobillier (1) :

Si trois plans rectangulaires P', P'', P''' sont respectivement tangents à trois quadriques homofocales Q', Q'', Q''' , leur point commun O décrira une sphère concentrique à ces quadriques.

Soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho', \quad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho'', \quad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho''',$$

les équations des quadriques Q', Q'', Q''' . Appelons p_i', p_i'', p_i''' et

(1) *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 329.

r_i les distances du point P_i aux plans P' , P'' , P''' et au point O .
On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho', \quad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho'', \quad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \rho''',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = \rho' + \rho'' + \rho''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2;$$

par suite,

$$\sum_1^{10} a_i r_i^2 = \rho' + \rho'' + \rho''.$$

Cette équation définit la sphère de Monge de la quadrique

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \frac{\rho' + \rho'' + \rho''}{3}.$$

Le théorème est donc démontré.

9. *Étant donnés dans l'espace n points fixes P_i , les droites qui satisfont à la condition*

$$(10) \quad \sum_1^n a_i d_i^2 = 2\rho$$

constituent un complexe de Painvin.

En effet, si l'on considère la quadrique qui correspond à l'équation

$$\sum_1^n a_i p_i^2 = \rho,$$

le complexe de Painvin relatif à cette quadrique sera défini par l'équation

$$\sum_1^n a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Pour s'en assurer, il suffit de répéter le raisonnement du n° 2.

Supposons, dans l'équation (10), n infini; nous obtiendrons le théorème suivant :

Un corps solide étant donné, les droites par rapport auxquelles le moment d'inertie de ce corps est constant engendrent un complexe de Painvin (1).

40. Si l'on fait $n = 2$, $\rho = 0$, l'équation (10) devient

$$(11) \quad a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 = 0$$

ou

$$(12) \quad d_1^2 = \lambda d_2^2,$$

pourvu qu'on pose

$$-\frac{a_2}{a_1} = \lambda^2.$$

Étudions le complexe représenté par l'équation (11).

On déduit de (12)

$$d_1 = \lambda d_2.$$

Le complexe actuel est donc celui des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant. Mais ce complexe est aussi le complexe de Painvin de la quadrique représentée par l'équation

$$p_1^2 - \lambda^2 p_2^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(p_1 + \lambda p_2)(p_1 - \lambda p_2) = 0.$$

Cette quadrique se compose des deux points F_1, F_2 qui divisent harmoniquement, dans le rapport λ , le segment $P_1 P_2$.

Donc :

Le complexe des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est aussi celui des droites par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires passant chacun par un point fixe.

Cette proposition aurait pu être établie également par des considérations de Géométrie pure.

41. On démontrerait sans peine que :

Le cône du complexe, relatif à un point quelconque S, admet

(1) Ce théorème a été énoncé, il y a quelques années, par M. Fouret dans une Communication verbale faite à la Société mathématique de France.

deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites SF_1 et SF_2 .

La conique du complexe, relative à un point quelconque P, admet comme foyers les projections orthogonales, sur ce plan, des points F_1 et F_2 .

12. Nous terminerons cette Note en démontrant une propriété du complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre

$$(13) \quad au^2 + a'v^2 + a'w^2 + d = 0.$$

Cette quadrique fait partie de la famille de quadriques homofocales

$$(a + \rho)u^2 + (a' + \rho)v^2 + (a' + \rho)w^2 + d = 0.$$

Pour $\rho = -a'$, cette équation se réduit à

$$(a - a')u^2 + d = 0$$

et représente deux points F_1 et F_2 , foyers d'une section méridienne quelconque de la quadrique (13). La propriété du n° 11, jointe à celle du n° 5, permet par conséquent d'énoncer ce théorème :

Si l'on considère le complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre, dont F_1 et F_2 sont les foyers d'une section méridienne quelconque, le cône du complexe, relatif à un point quelconque S, admet deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites SF_1 et SF_2 ; et la conique du complexe, relative à un plan quelconque P, admet comme foyers les projections orthogonales sur ce plan des points F_1 et F_2 .

Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème; par M. EM. LEMOINE.

M. d'Ocagne, ingénieur-adjoint à l'ingénieur en chef chargé du Service du nivellement général de la France, a eu à s'occuper, à propos de son service, de la question suivante :

n droites qui devraient concourir en un même point sont déterminées expérimentalement et, par suite, ne concourent pas exactement; trouver le point le plus probable de leur intersection commune.

A une séance de la *Société mathématique* (fin de 1891), M. d'Ocagne a traité le problème, et nous admettons, avec lui, dans ce qui suit, que le point le plus probable est le point tel que la somme des carrés de ses distances aux n droites soit un minimum.

Dans le cas où n serait égal à 3, ce serait donc le point de *Lemoine* du triangle formé par ces trois droites.

La construction que M. d'Ocagne indiqua alors pour obtenir ce point lui paraissant un peu compliquée, il en donna, à une autre séance, une modification qui la rendait plus simple et que j'appellerai *la construction A*.

M. Laisant, qui avait assisté à ces Communications, s'occupa également du problème et, à une troisième séance, présenta une autre construction que j'appellerai *la construction B*.

M. d'Ocagne fit ensuite à l'Académie des Sciences, par l'intermédiaire de M. Bouquet de la Grye, une Communication dans laquelle il fit connaître une nouvelle construction simplifiant beaucoup, *croyait-il*, celle qu'il avait donnée et que j'appellerai *la construction C*.

J'eus l'idée de comparer, par ma méthode de mesure de la simplicité des constructions, dont j'ai déjà indiqué ici les éléments (voir *Bulletin de la Société mathématique*, p. 162; séance du 4 juillet 1888), ces trois solutions pour évaluer leurs simplicités relatives lorsqu'il s'agit de les construire effectivement, évaluation dont le résultat n'a, le plus souvent, qu'un rapport fort éloigné avec la simplicité appréciée d'après l'exposé plus ou moins élégant et court de la solution et c'est le seul genre de simplicité dont les géomètres se soient occupés jusqu'ici; j'écrivis alors à M. d'Ocagne pour avoir quelques renseignements y relatifs, et, dans sa réponse, il me fit connaître une dernière solution dont la construction lui paraissait plus simple encore; nous l'appellerons *la construction D*. Il communiqua la construction D à la Société (séance du 2 novembre 1892).

Le but de cette Note est de donner, comme exemple de l'emploi de la méthode que nous avons imaginée, la mesure de la simplicité *théorique* de chacune des constructions A, B, C, D, afin de reconnaître quelle est celle qui est réellement la plus simple, le compas à la main, toutes choses égales d'ailleurs.

Pour permettre de nous suivre sans difficulté, nous donnerons d'abord le symbole de toutes celles des constructions fondamentales de la Géométrie qui nous serviront dans les évaluations particulières que nous allons faire.

Nous rappelons les notations que nous avons adoptées pour désigner les éléments irréductibles des constructions :

Mettre le bord de la règle sur un point : R_1 ; par suite, sur deux points : $2 R_1$; tracer une droite : R_2 .

Mettre *une* pointe du compas sur un point donné : C_1 ; par suite, chaque pointe sur un point : $2 C_1$.

Mettre une pointe sur un point indéterminé d'une ligne donnée : C_2 .

Tracer un cercle : C_3 .

Toute opération géométrique de la règle et du compas est donc représentée par

$$\text{Op. : } (m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3),$$

$m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ ou le nombre d'opérations élémentaires irréductibles est ce que nous appelons le *coefficient de Simplicité* ou, pour abrégé, *la Simplicité*; $m_1 + n_1 + n_2$ est le *coefficient d'Exactitude* ou, pour abrégé, *l'Exactitude*;

m_2 le nombre de droites, n_3 le nombre de cercles tracés.

Rappelons encore qu'il s'agit d'une simplicité théorique où les difficultés *matérielles* provenant des dimensions des données, de celles de la feuille d'épure, des instruments, des angles sous lesquels se coupent les droites, les cercles, etc. n'existent pas. Notre méthode, s'il m'est permis de prendre aussi haut nos comparaisons, est à la construction réelle à peu près ce que la Mécanique rationnelle est à la Mécanique pratique.

Pour abrégé l'écriture, nous convenons que

$$M(R) \quad \text{ou} \quad M(AB)$$

signifiera le cercle qui a pour centre M et pour rayon R ou AB.

Op. : est l'abrégé du mot opération.

I. *Tracer une droite passant par deux points placés.*
Op. : $(2R_1 + R_2)$.

II. *Prendre avec le compas la longueur d'une ligne donnée.....* Op. : $(2C_1)$.

III. *Tracer un cercle quelconque :*
1° *De centre donné.....* Op. : $(C_1 + C_3)$.
2° *De centre et de rayon donnés.* Op. : $(3C_1 + C_3)$.

IV. *Placer, par rapport à une droite D, le point symétrique A' d'un point A.*

Je trace A(R), R étant quelconque, qui coupe D en B et C. Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace B(R), C(R) qui se coupent en A'.

Op. : $(2C_1 + 2C_3)$.
Op. : $(3C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 6; exactitude : 3; 3 cercles.

V. *Placer le sommet b d'un parallélogramme ObAC connaissant O, A, B; OA, OB étant deux côtés, tracés ou non, du parallélogramme.*

Je trace A(OB)..... Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Je trace B(OA)..... Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Ces deux cercles se coupent en b.

Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.

Simplicité : 8; exactitude : 6; 2 cercles.

VI. *Par un point A, mener une droite parallèle à une droite donnée BC.*

a. Je trace un cercle quelconque passant par A; mais de rayon assez grand pour qu'il coupe BC en B et en C.

Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je prends BA..... Op. : $(2C_1)$, puis je trace C(DA) qui coupe en D (du même côté de BC que A) le premier cercle tracé.... Op. : $(C_1 + C_3)$.

je trace AD..... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
qui est la parallèle cherchée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 6; 1 droite, 2 cercles.

b. Je trace A(R) qui coupe BC en B, R quelconque
mais assez grand pour couper BC. ... Op. : $(C_1 + C_3)$,
je trace B(R) qui coupe BC en C. ... Op. : $(C_1 + C_3)$,
puis C(R) qui coupe A(R) en B du même côté de BC
que A..... Op. : $(C_1 + C_3)$,
enfin je trace AD..... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
qui est la parallèle cherchée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 3 cercles.

Remarquons que ces deux méthodes sont plus simples
que la méthode classique, laquelle donnerait pour symbole

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude 7; 1 droite, 3 cercles.

c. Cas où BC n'est pas tracée, donnée seulement par
deux points B et C.

Je prends BC et je trace A(BC).. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Je prends AB et je trace C(AB).. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Ces deux cercles se coupent en D (du même côté de BC
que A); je trace AD qui est la droite cherchée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2).$$

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude : 8; 1 droite, 2 cercles.

VII. *Diviser, au point D, une droite BC dans le rapport
de deux longueurs données M et N; $\frac{BX}{XC} = \frac{M}{N}$.*

Par B je mène une droite quelconque.

$$\text{Op. : } (R_1 + R_2).$$

je prends M et je trace B(M) qui coupe cette droite en D.

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

je prends N et je trace D(N) qui coupe cette droite en E.

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

B, D, E se succédant dans l'ordre où nous les nommons ;
par D (sans tracer EC), je mène une parallèle à EC qui
coupe BC en X. Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$.

Op. : $(3R_1 + 2R_2 + 12C_1 + 4C_3)$.

SimPLICITÉ : 21; exactitude 15; 2 droites, 4 cercles.

VII bis. Diviser une droite dans le rapport de deux NOMBRES
donnés m et n .

Cette question paraît la même que celle de diviser une droite dans le rapport de deux longueurs données; mais, au point de vue général de la *construction* théorique à effectuer à l'aide de la *Géométrie*, elle en est profondément différente; comme elle se présentera pour placer le centre de gravité de n masses égales (construction XII), nous sommes obligé d'entrer, à son sujet, dans d'assez longs détails.

L'introduction, dans cet énoncé, de l'idée *générale* de nombre, fait que la construction sort du domaine de la construction *pure*, et l'on ne trouve pas de méthode *générale*, indépendante de m et de n , pour l'exécuter, pas plus, du reste, que l'on n'en trouve une pour construire *le plus simplement possible* une droite m fois plus grande qu'une droite donnée, quel que soit m .

Chaque problème particulier qui amène à diviser une certaine droite dans le rapport de deux nombres *particuliers*, dérivant alors de ce problème, doit donc être étudié à part au point de vue de la *Géométrie*.

En pratique, on transforme ces nombres en longueurs au moyen d'une règle divisée, mais on sort ainsi des deux seuls instruments, la règle et le compas, dont nous nous permettons l'usage en *Géométrie pure*.

On pourrait rentrer dans le cadre de la *Géométrie*, comme nous allons le montrer, mais la méthode

qu'il faudrait suivre s'éloigne tellement de ce qui est réellement fait, que nous ne l'adoptons pas. Ces deux problèmes, les seuls que nous connaissions dans ce cas, ne se présentent du reste pour ainsi dire jamais en Géométrie *pure* avec le sens général du nombre; car, chaque fois que l'idée de nombre s'introduit, c'est un nombre particulier en relation avec des propriétés qui ne conviennent qu'à la question particulière traitée; ainsi, *placer le milieu d'une droite* conduit à la diviser dans le rapport de 1 à 1. La propriété que *les médianes d'un triangle se coupent dans le rapport de 1 à 2* conduit à ce rapport de 1 à 2, pour lequel on a ainsi une construction particulière n'indiquant rien pour d'autres rapports, etc.

Diviser en D une droite BC dans le rapport des deux nombres m, n , $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ avec $m < n$ conduirait, par la *Géométrographie* et sans nouvelles conventions, à la construction générale suivante : par B je mène une droite quelconque. Op. : $(R_1 + R_2)$, je trace $B(r)$, r étant une longueur quelconque, qui coupe cette droite en B_1 , puis $B_1(r)$ qui coupe la même droite en B_2 , etc.; puis $B_{n-1}(r)$ qui coupe la même droite en B_n .

Op. : $[n(C_1 + C_3)]$, je mènerai par B_m une parallèle à $B_n C$ sans tracer $B_n C$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$, et cette parallèle couperait BC au point de division cherché.

Op. : $[3R_1 + 2R_2 + (n+6)C_1 + (n+2)C_3]$.

Mais cette manière de procéder est, comme nous l'avons dit, si loin de la façon réelle d'opérer que nous ne voulons point l'admettre, elle ne serait jamais la plus simple possible dans chaque cas particulier, ainsi que cela résulte des explications précédentes. C'est pour la même raison que nous ne créons pas un nouveau symbole qui permettrait de serrer de plus près ce que l'on pourrait faire graphiquement pour porter, à la suite, une série de n longueurs égales sur une droite donnée à partir de BC. En effet, on prend avec le compas la longueur à porter; on met une

pointe en B_2 et la laissant en B_1 , on met la seconde pointe sur la droite en B_1 , etc., et nous n'avons pas spécifié de symbole pour exprimer l'opération qui consiste à mettre la seconde pointe sur une ligne tracée lorsque la première est fixe, car nous n'y avons vu qu'une complication des principes de la théorie et pas d'avantages.

Nous supposerons donc, dans ce problème et dans ceux qui sortent de la *Géométrie* pure, comme ceux de la Statique, que les nombres m et n étant donnés, nous avons toujours deux lignes dans le rapport de m à n . Cela est vrai, en pratique, puisqu'on se sert de règles divisées.

Pour diviser une ligne dans le rapport des nombres m et n , nous admettrons donc, en général, le même symbole que pour diviser la droite dans le rapport de deux lignes données.

Ce qui prouve bien la justesse de l'idée de ne pas considérer cette construction comme une construction graphique proprement dite, c'est que, dès qu'on la travaille, on se heurte à des problèmes de nombres fort délicats et quelquefois non résolus, questions qui par essence sont évidemment étrangères à l'art graphique proprement dit. Par exemple, examinons le problème suivant :

Construire une ligne qui soit n fois une longueur donnée l ; je supposerai n un nombre assez élevé. Je double l , j'ai $2l$; je double $2l$ sur la droite, j'ai 2^2l ; je double 2^2l , j'ai 2^3l , et ainsi de suite 2^3l , 2^4l , ...; je m'arrête à $2^x l$. Lorsque 2^{x+1} serait plus grand que n , il me reste alors à porter encore $n - 2^x$ fois la longueur l ; on voit facilement, en étudiant le problème, qu'il revient à peu près à celui-ci :

Combien, au moins, faut-il faire de multiplications pour élever un nombre A à la puissance n ? Problème de nombres qui me semble fort difficile.

J'ai montré, cette année 1892, au Congrès de l'Association française, à Pau, comment l'étude de ces construc-

tions où entre l'idée générale de *nombre* conduisait à la résolution, en nombres entiers, d'une certaine équation indéterminée, soit à deux, soit à trois variables.

VIII. *En P mener une perpendiculaire à une droite PJ donnée.*

Je trace un cercle $O(R)$ de rayon quelconque R et de centre quelconque O , mais passant par P .

$Op. : (C_1 + C_3)$,
ce cercle coupe PJ en P' . Je trace $P'O$ qui coupe $O(R)$ en Q et je trace PQ $Op. : (4R_1 + 2R_2)$.

PQ est la perpendiculaire cherchée.

$$Op. : (4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3).$$

Simplicité : 8; exactitude : 5; 2 droites, 1 cercle.

IX. *Abaissier d'un point C, hors d'une droite donnée AB, une perpendiculaire à AB.*

a. Méthode classique.

Je trace $C(R)$, R étant quelconque mais suffisant pour couper AB en A et en B $Op. : (C_1 + C_3)$,
je trace $A(R)$, $B(R)$ qui se coupent en C' .

$Op. : (2C_1 + 2C_3)$,
je trace CC' $Op. : (2R_1 + R_2)$.

$$Op. : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 3 cercles.

b. Méthode un peu plus simple.

B étant un point quelconque de AB , je décris $B(BC)$ qui coupe AB en A $Op. : (C_1 + C_2 + C_3)$,
je prends AC et je décris $A(AC)$ qui coupe $B(BC)$ en C' .

$Op. : (2C_1 + C_3)$,
je trace CC' qui est la perpendiculaire cherchée.

$$Op. : (2R_1 + R_2).$$

$$Op. : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_2 + 2C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 2 cercles.

c. AB n'est pas tracée.

Je trace $B(BC)$, $A(AC)$ qui se coupent en C et C' .

Op. : $(4C_1 + 2C_3)$,

je trace CC' Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Simplicité 9; exactitude 6; 1 droite, 2 cercles.

X. *Faire avec une droite donnée BC , en un point donné B , un angle égal à un angle donné DAE .*

Je trace un cercle $A(AE)$ de rayon quelconque.

Op. : $(C_1 + C_3)$,

il coupe AD en D , AE en E , D et E étant sur les côtés de l'angle DAE .

Je trace $B(AE)$ qui coupe BC en F . Op. : $(C_1 + C_3)$,

je prends DE et je trace $F(DE)$ qui coupe $B(AE)$ en H .

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

je trace BH ; HBC est l'angle cherché. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 11; exactitude : 7; 1 droite, 3 cercles.

XI. *Sur QQ' comme diamètre décrire une circonférence.*

Je décris, avec un rayon $R > \frac{1}{2}QQ'$, $Q(R)$, $Q'(R)$ qui se coupent en C et en C' Op. : $(2C_1 + 2C_3)$,

je trace CC' qui coupe QQ' en son milieu O .

Op. : $(2R_1 + R_2)$,

je trace $O(OQ')$ Op. : $(2C_1 + C_3)$,

qui est le cercle cherché.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 10; exactitude : 6; 1 droite, 3 cercles.

XII. *Placer le centre de gravité de n masses égales appliquées en des points donnés $A_1, A_2, \dots, A_n$.*

Je prends un point quelconque O et je place le sommet K_1 du parallélogramme $OA_1K_1A_2$ sans tracer ni OA_1 , ni OA_2 , puis de même le sommet K_2 du parallélogramme $OK_1K_2A_3$, etc.; enfin le sommet K_{n-1} du parallélogramme $OK_{n-2}K_{n-1}A_n$, chaque opération de placement d'un som-

met étant donné par. Op. : $(6C_1 + 2C_3)$,
 K_{n-1} est placé par. Op. : $[(n-1)(6C_1 + 2C_3)]$,
je trace OK_{n-1} Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je divise OK_{n-1} en G , de façon que $\frac{OG}{GK_{n-1}} = \frac{1}{n}$ (*voir*
VII *bis*), en opérant la construction VII diminuée de
 $R_1 + R_2$, puisque j'ai déjà tracé des droites passant par O .
Op. : $(2R_1 + R_2 + 12C_1 + 4C_3)$.

J'ai donc le centre de gravité G des n points $A_1, A_2, \dots$,
 A_n par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3].$$

Simplicité : $8n + 14$; exactitude : $6n + 10$; 2 droites;
 $2(n+1)$ cercles.

Remarquons qu'il sera souvent nécessaire, en pratique, de modifier un peu cette construction, car si n est assez grand, il peut quelquefois devenir difficile de diviser OK_{n-1} dans le rapport $\frac{1}{n}$, parce que le segment OG serait trop petit; on peut alors faire comme il suit :

On partage les n points A en deux groupes, l'un

$$A_1, A_2, \dots, A_p,$$

l'autre

$$A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_n.$$

Soit G_1 le centre de gravité des points $A_1, \dots, A_p$, que j'obtiens par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(p+1)C_1 + 2(p+1)C_3];$$

soit G_2 le centre de gravité des points $A_{p+1}, \dots, A_n$, que j'obtiens par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(n-p+1)C_1 + 2(n-p+1)C_3].$$

G m'est donné en joignant G_1, G_2 ,

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2),$$

et divisant G_1G_2 dans le rapport $\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{n-p}{p}$:

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 12C_1 + 4C_3);$$

G est donc ainsi obtenu par le symbole :

$$\text{Op. : } [12R_1 + 6R_2 + 6(n+4)C_1 + 2(n+3)C_3].$$

L'opération est alors plus compliquée de

$$\text{Op. : } (8R_1 + 2R_2 + 18C_1 + 4C_3).$$

Entrons maintenant dans l'examen des constructions A, B, C, D.

CONSTRUCTION A (PREMIÈRE DE M. D'OCAGNE).

Soient $d_1, d_2, \dots, d_n$ les n droites données; pour trouver le point M tel que la somme des carrés de ses distances aux n droites d_p soit minima, j'opère ainsi :

1° Je place, au moyen d'un seul cercle tracé, les points symétriques A_p , d'un point arbitraire O du plan, par rapport aux n droites $d_p, \dots, \dots$. Op. : $[2n C_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité G des points A_p .
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je trace par O une perpendiculaire à OG (OG déjà tracée).
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_2)$.

Cette perpendiculaire coupe en P et en P' le cercle décrit de O comme centre pour obtenir les A_p .

4° Je mène par P' des parallèles aux droites d_p , parallèles qui coupent une seconde fois le même cercle au point B_p , en me servant pour mener toutes ces parallèles d'un seul cercle passant par P'.

$$\text{Op. : } [2nR_1 + nR_2 + (3n+1)C_1 + (n+1)C_3].$$

5° Je trace P(OP) dont j'aurai besoin plus tard (voir 10°).
Op. : $(C_1 + C_3)$.

6° Je place le centre de gravité H des points B_p .
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + (n+1)C_3]$.

7° Je trace PH et j'abaisse de O une perpendiculaire sur PH.
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Cette perpendiculaire est un lieu de M.

- 8° Je place un point G_1 (sans tracer OG_1) tel que PG_1 soit équipollent à OG_1 Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
- 9° De même, je place un point J , tel que PJ soit équipollent à HG_1 Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
- 10° Je trace PJ et en P j'éleve une perpendiculaire à PJ .
Op. : $(6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3)$.
- J'appelle Q le point de cette perpendiculaire, tel que $PQ = OP$, Q est sur $P(OP)$ déjà tracé (voir 5°); soit Q' le point diamétralement opposé à Q sur le cercle $O(OP)$.
- 11° Je joins OH qui coupe en h le cercle déjà tracé de diamètre PP' .
Op. : $(2R_1 + R_2)$.
- 12° Je mène par Q' une parallèle à $P'h$ (sans tracer $P'h$).
Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$
- parallèle qui coupe en K le cercle (déjà tracé) qui a QQ' pour diamètre.
- 13° Je porte sur PK le segment $PK = OH$. Op. : $(3C_1 + C_3)$.
- 14° Je trace QK et par P je mène une perpendiculaire à QK .
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Cette perpendiculaire est un deuxième lieu du point M , qui est obtenu ainsi par le symbole :

$$\text{Op. : } [2(n+15)R_1 + (n+15)R_2 + (17n+43)C_1 + (7n+22)C_3].$$

Simplicité: $27n + 110$; exactitude: $19n + 73$; $(n+15)$ droites, $(7n+22)$ cercles.

CONSTRUCTION B (1) (DE M. LAISANT).

- 1° Je place les symétriques O'_p d'un point arbitraire O par rapport aux n droites données. Op. : $[2nC_1 + (2n+1)C_3]$.
- 2° Je place le centre de gravité G des points O_p .
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

(1) Je ferai remarquer que je ne donne pas la justification des constructions indiquées, laquelle n'a rien de commun avec le but de ce travail; j'ai pris ces constructions telles qu'elles m'ont été communiquées par leurs auteurs, en conservant leurs notations qui sont différentes pour chaque construction.

3^o Je décris $O(OG)$, $B(OG)$ Op. : $(4C_1 + 2C_3)$.
 OG coupe $O(OG)$ en B, $B(OG)$ servira dans la suite (voir 8^o).

4^o Par B je mène des parallèles aux n droites données en me servant d'un seul cercle passant par B et coupant les n droites.
 Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n + 1)C_1 + (n + 1)C_3]$.
 Ces parallèles coupent le cercle $O(OG)$ en $E_1, E_2, \dots, E_n$.

5^o Je place le centre de gravité H des points E.
 Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n + 1)C_1 + 2(n + 1)C_3]$.

6^o Je place le sommet K d'un parallélogramme OGHK.
 Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.

7^o Je trace OK Op. : $(2R_1 + R_2)$.

8^o Je fais l'angle $ZGM = KOH$. Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3)$,
 en me servant des cercles $O(OG)$, $B(OG)$ et appelant M
 le point de rencontre de OK et de GM.

M est le point cherché obtenu par le symbole

Op. : $[2(n + 6)R_1 + (n + 6)R_2 + (17n + 26)C_1 + (7n + 11)C_3]$.

Simplicité : $27n + 55$; exactitude : $19n + 38$; $(n + 6)$ droites,
 $7n + 11$ cercles.

CONSTRUCTION C (DEUXIÈME DE M. D'OCAGNE).

1^o D'un point O quelconque du plan j'abaisse des perpendiculaires sur les n droites données (en ne me servant que d'une seule circonférence), soit D_p le pied de l'une d'elles.

Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (2n + 1)C_1 + (2n + 1)C_3]$.

2^o Je place le centre de gravité G des points D_p .
 Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n + 1)C_1 + 2(n + 1)C_3]$.

3^o Je mène par O des parallèles aux n droites données en ne me servant que d'un seul cercle passant en O.
 Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n + 1)C_1 + (n + 1)C_3]$.

4^o Sur OG (déjà tracée pour avoir G) comme diamètre, je décris une circonférence et j'appelle E_p les points de rencontre de cette circonférence avec les parallèles aux droites don-

nées menées par O Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.

5° Je place le centre de gravité H des points E_p .

Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

6° J'élève en O une perpendiculaire OK à OG.

Op. : $(4R_1 + 2R_2)$,

en me servant du cercle tracé pour avoir les points D.

7° Par H je mène une parallèle à OG qui coupe OK en K.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

8° Je trace GH Op. : $(2R_1 + R_2)$.

9° En O j'élève à OH (déjà tracée pour avoir H) une perpendiculaire qui coupe en I la droite GH; j'utilise pour cela le cercle tracé pour avoir les points D_p . Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

10° Je mène par G une perpendiculaire à IK, sans tracer IK (construction IX, c) . . . Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

M, point cherché, est à l'intersection de OH avec cette perpendiculaire; il est obtenu par le symbole

Op : $[4(n+6)R_1 + 2(n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+13)C_3]$.

Simplicité : $30n+75$; exactitude : $21n+50$; $2(n+6)$ droites, $(7n+13)$ cercles.

CONSTRUCTION D (TROISIÈME DE M. D'OCAGNE).

1° Je prends les symétriques O'_p d'un point arbitraire O par rapport à toutes les droites données.

Op. : $[2nC_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité O' des points O'_p .

Op. : $[4R_1 + 2C_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je prends les symétriques O''_p de O' par rapport à toutes les droites données Op. : $[(2n+1)C_1 + (2n+1)C_3]$.

4° Je place le centre de gravité O'' des points O''_p .

Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

5° Je fais angle $O''O'M = O''OO'$ sans tracer $O'O''$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$.

M, point cherché, est à la rencontre de OO'' et de MO' ; il est obtenu par le symbole

$$\text{Op. : } [10R_1 + 5R_2 + (16n + 19)C_1 + (8n + 9)C_3].$$

Simplicité : $24n + 43$; exactitude : $16n + 29$; 5 droites, $8n + 9$ cercles.

RÉSUMÉ.

Construction A.

$$\text{Op. : } [2(n+15)R_1 + (n+15)R_2 + (17n+43)C_1 + (7n+22)C_3].$$

Simplicité : $27n + 110$; exactitude : $19n + 73$; $(n+15)$ droites, $(7n+12)$ cercles.

Construction B.

$$\text{Op. : } [2(n+6)R_1 + (n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+11)C_3].$$

Simplicité : $27n + 55$; exactitude : $19n + 38$; $(n+6)$ droites, $(7n+11)$ cercles.

Construction C.

$$\text{Op. : } [4(n+6)R_1 + 2(n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+13)C_3].$$

Simplicité : $30n + 75$; exactitude : $21n + 50$; $2(n+6)$ droites, $(7n+13)$ cercles.

Construction D.

$$\text{Op. : } [10R_1 + 5R_2 + (16n + 19)C_1 + (8n + 9)C_3].$$

Simplicité : $24n + 43$; exactitude : $16n + 29$; 5 droites, $(8n + 9)$ cercles.

On voit que, à tous égards, la construction D est de beaucoup la plus simple. Remarquons aussi que le nombre de droites dont elle exige le tracé est toujours 5, quel que soit n .

La construction B est *toujours* plus simple, d'une façon absolue, que les constructions A et C, puisque les coefficients de R_1 , R_2 , C_1 , C_2 y sont tous plus petits que ceux de la construction A.

La construction C est plus simple que A pour $n \leq 11$, moins simple dans le cas contraire.

On peut donc les ranger ainsi

$$D, \quad B, \quad A \quad \text{et} \quad C,$$

par ordre de simplicité décroissante; il faut remarquer toutefois que C est préférable à A, comme nous l'avons dit, pour les valeurs de n inférieures à 12.

Cet exemple montre la *nécessité* d'un critérium, car en estimant la chose, comme on l'a toujours fait jusqu'ici au point de vue spéculatif, M. d'Ocagne pensait évidemment que la construction C, présentée à l'Académie postérieurement à son premier essai A était préférable, tandis que le contraire a lieu s'il ne s'agit plus d'une proposition spéculative, mais d'une construction. ce qui était le cas.

Si n a une valeur petite, 3, 4, 5 par exemple, on trouve facilement des méthodes particulières *beaucoup plus simples* que les constructions générales comparées ici.

La détermination de la simplicité et de l'exactitude théoriques des constructions doit paraître, au premier abord, fort longue parce qu'elle est assez difficile à détailler par écrit brièvement; mais elle est, en réalité, très rapide, puisque, ayant établi une fois pour toutes les symboles des constructions composantes qui se retrouvent toujours les mêmes dans toutes les questions, on n'a à faire que quelques additions de petits nombres.

Les simplifications à ces constructions générales, qui peuvent être appliquées dans chaque cas traité, se font aussi très rapidement dès qu'on a nommé quelques constructions comme exercice.

Je borne là ce que je veux dire ici à propos de *la Géométrie ou art des constructions géométriques* (voir, pour plus de détails, le volume du Congrès de Pau, 1892, de l'Association française pour l'avancement des Sciences); mais, comme, à l'origine de mes études sur ce sujet, j'en ai parlé à la Société mathématique (*loco citato*), je veux ajouter quelques mots nécessaires pour expliquer les différences entre certains résultats que j'obtenais alors et ceux que je donnerais aujourd'hui, si ce petit travail était à refaire (voir d'ailleurs, pour plus de détails, mon Mémoire du Congrès de Pau).

D'abord je n'avais encore eu que l'idée de l'évaluation de la simplicité des constructions qui étaient effectuées et j'étais loin de me douter que toutes les constructions fondamentales, qui se trouvent, depuis Euclide, dans les Traités de Géométrie et au moyen

desquelles je faisais mes évaluations, sont trop compliquées, c'est-à-dire que j'admettais implicitement qu'elles étaient les plus simples possible; s'il y en avait plusieurs, je choisissais celle qui s'énonçait le plus simplement; je suivais le texte géométrique sans y chercher systématiquement les simplifications, recherche qui est maintenant l'un des objets principaux de la *Géométrographie*.

Par exemple, pour évaluer la simplicité de la construction nécessaire pour placer un point M donné par ses coordonnées cartésiennes x et y , par rapport à deux axes Ox , Oy , j'avais pris, comme au hasard, cette construction évidente :

Prendre $Ox' = x$ sur Ox , par x' mener une parallèle à Oy , enfin prendre, sur cette parallèle et dans le sens convenable, $x'M = y$, ce qui me conduisit alors à

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 11C_1 + 5C_3)$$

pour le cas des axes obliques; simplicité : 19; et s'ils étaient rectangulaires à

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_3).$$

À cette époque, je n'avais pas vu encore que la construction classique de mener, par un point donné, une parallèle à une droite était simplifiable; je ne m'occupais pas du coefficient d'Exactitude, plus important certainement que le coefficient de Simplicité, etc.

Il est évident, même sans évaluation d'aucune espèce, que la construction suivante est plus simple et que c'est elle que j'aurais dû choisir; mais l'examen de la chose ne m'était même pas venu à l'idée, parce que la première était plus courte à exprimer, ce qui était la simplicité spéculative comme l'entendent jusqu'ici les Géomètres.

Maintenant, mis en éveil par l'expérience, je chercherais la construction la plus simple et j'opérerais ainsi pour placer le point M : je trace $O(x)$ qui coupe Ox en x' et $O(y)$ qui coupe Oy en y' ,

$$\text{Op. : } (6C_1 + 2C_3),$$

puis je trace $x'(y')$

$$\text{Op. : } (C_1 + C_3),$$

je reprends x entre les branches du compas et je trace $x'(x)$ qui

coupe $x'(x)$ en M

Op. : $(3C_1 + C_3)$;

en tout :

Op. : $(10C_1 + 4C_3)$.

Simplicité : 14; exactitude : 10; 4 cercles.

Si je me sers de deux compas, j'économise $2C_1$, puisque je n'ai pas besoin de reprendre x entre les branches du compas et le symbole est :

Op. : $(8C_1 + 4C_2)$.

Simplicité : 12; exactitude : 8; 4 cercles, au lieu de : simplicité : 19; exactitude : 13; 1 droite; 5 cercles, ainsi que j'avais obtenu.

Il y aurait d'autres observations du même genre à faire sur d'autres points de détail de notre Note de 1888; nous croyons inutile de nous y arrêter puisqu'elles ne touchent nullement la doctrine, mais son application rationnelle que nous ne savions pas encore faire complètement.



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XX.

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	v
Liste des Sociétaires perpétuels.....	vi
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1892.....	vii
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son <i>Bulletin</i>	xv
Sur la fonction exponentielle; par M. D'ARONE.....	2
Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique; par M. FOURET.....	4
Transformation d'un polynôme entier; par M. LAISANT.....	6
Note relative aux points centraux; par M. FÉLIX LUCAS.....	10
Note relative au symbole $\tilde{p}$, et en général à l'opération $p^{\#}$; par M. LAISANT.....	12
Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux; par M. LUCIEN LÉVY.....	15
Sur certaines surfaces spirales; par M. RAFFY.....	16
Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse; par M. FÉLIX LUCAS.....	17
Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique; par M. APPELL.....	21
Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèle; par M. L. RAFFY.....	22
Sur les polygones inscrits dans les coniques; par M. FÉLIX LUCAS.....	33
Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique; par M. FOURET.....	35
Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate; par M. FOURET.....	38
Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique; par M. CATALAN....	40
Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches; par M. DEMOULIN.....	43
Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante; par M. L. RAFFY.....	47
Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	49
Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques; par M. FOURET.....	60

	Pages.
Sur un problème de Géométrie; par M. LAISANT.....	65
Sur les singularités des courbes algébriques planes; par M. BROCHE.....	67
Égalités à deux et à trois degrés; par M. FROLOV.....	69
Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales; par M. MANGEOT.....	84
Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures; par M. CARONNET.....	91
Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière; par M. BLUTEL.....	92
Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions; par M. SCHLEGEL.....	97
Une lettre d'ABEL TRANSON.....	104
Sur les involutions d'espèce quelconque; par M. MAX GENTY.....	107
Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur une surface; par M. CARONNET.....	115
Remarques sur les fonctions homogènes; par M. C.-A. LAISANT.....	117
Des involutions sur les courbes algébriques; par M. HUMBERT.....	121
Sur les suites récurrentes; par M. D'OCAGNE.....	121
Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires; par M. A. DEMOULIN.....	122
Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème; par M. ÉM. LEMOINE.....	132
Table des matières du tome XX.....	151

FIN DE LA TABLE DU TOME XX.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

19374. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT ET UNIÈME. — ANNÉE 1893.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ.

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—
1893

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1884	PICARD.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1885	APPELL.
1875	BIENAYMÉ.	1886	POINCARÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1887	FOURET.
1877	MANNHEIM.	1888	LAISANT.
1878	DARBOUX.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1879	O. BONNET.	1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1880	JORDAN.	1891	COLLIGNON.
1881	LAGUERRE.	1892	VICAIRE.
1882	HALPHEN	1893.	HUMBERT.
1883	ROUCHE.		

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.

BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).

BIOCHE, professeur de Mathématiques.

BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.

BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).

BROCARD, chef de bataillon du Génie.

CANET, ingénieur civil.

CHASLES, membre de l'Institut (décédé).

CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.

FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.

HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).

HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.

HERMITE, membre de l'Institut.

HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich (décédé).

JORDAN, membre de l'Institut.

LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).

MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.

DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico.

MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.

PEROTT (Joseph).

PERRIN, ingénieur en chef des Mines.

POINCARÉ, membre de l'Institut.

POLIGNAC (prince C. DE).

RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.

SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.

TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.

TARRY, contrôleur des Contributions diverses.

TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.

VIELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1893 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
--------------------------------------	---	---

Président	MM.	HUMBERT.
Vice-Présidents	{	DE COMBEROUSSE. GOURSAT. PICQUET. POINCARÉ.
Secrétaires	{	KOENIGS. RAFFY.
Vice-Secrétaires	{	CARVALLO. L. LÉVY.
Archiviste		BIOCHE.
Trésorier		CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1896. APPELL, 1894. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1896. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1894. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1894. ROUCHÉ, 1896. VICAIRE, 1896.
---	---	---

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1881. AMIGUES, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. ANTONARI, directeur des études à l'Ecole Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1879. APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. ARNAUD, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Arles (Bouches-du-Rhône).
1892. ARNOUX (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. BEGHIN (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
1874. BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P. (¹).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. BEYEVS (Ignacio), major du Génie, Santa Inés, 5, à Cadix (Espagne).
1872. BIENAYMÉ (Arthur), directeur du matériel, au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au Collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris, S. P.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1890. BIERKNES, professeur à l'Université, à Christiania (Norvège).
1891. BLUTEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. BONAPARTE (prince Roland), Cours la Reine, 22, à Paris.
1881. BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. BOULANGER, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algerie).
1886. BRAULT (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'Ecole Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'Ecole Centrale, rue Vanquelin, 18, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du Génie, à Valence (Drôme), S. P.
1886. BRUNEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1888. CAVET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'Artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris. S. P.
1885. CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. CARONNET, licencié ès sciences mathématiques et physiques, avenue de Wagram, 81, à Paris.
1887. CARVALLO, examinateur à l'Ecole Polytechnique, villa Saïd, 19, Passy-Paris.
1887. CASPARY, professeur à l'Ecole d'Architecture, Markgrafenstrasse, 16, Berlin (Allemagne).
1873. CATALAN, professeur émérite à l'Université, rue des Ebnrons, 21, à Liège (Belgique).
1890. CEDERCRANTZ (baronne Nanuy, née de Lagerborg), à Helsingfors (Finlande).
1892. CELLÉRIER (Gustave), rue Claude-Bernard, 63, à Paris.

(¹) Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. CHRYSAL, professeur à l'Université, à Edimbourg (Écosse).
1873. CIVALE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
1872. COLLIGNON, inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. COLOT, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. CRETIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. DARROUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. DELANVOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. DEMARTRES, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, rue Royer-Collard, 14, à Paris.
1883. DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. DEWULF, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Rabatau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1882. DREYFUS (Camille), député, quai Voltaire, 3, à Paris.
1886. DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1873. FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUCQUEMBERGUE, professeur au Lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. FEHR (Henri), licencié ès sciences mathématiques, rue de Vaugirard, 46, à Paris.
1885. FERRAZ, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. FIELDS (John), professeur de Mathématiques, Alleghany College, à Meadville (Etats-Unis d'Amérique).
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. FLYE SANTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
1891. FONTVILANT (DE), répétiteur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. FOICHÉ, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
1892. **FROLOV** (le général), quai Pierre Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Oran (Algérie).
1890. **GENTY** (Max), enseigne de vaisseau, à bord du *Héron*, à Kotonou (Afrique).
1892. **GENTY** (Paul), rue Gay-Lussac, 14, à Paris.
1890. **GENGALDI**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1881. **GOERSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. **GUMARAES**, officier du Génie, rua de Sacramento à Lapa, 44, à Lisbonne (Portugal).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. **HABICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris, S. P.
1872. **HENRY**, inspecteur général des Ponts et Chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. **HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1879. **HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. **ISSALY** (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. **JAINY**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. **JONQUIÈRE** (Alfred), Docteur en Philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).

Date
de
l'admission.

1892. KOCH (H. von), maître de Conférences à l'Université de Stockholm, rue Corneille, 5, à Paris.
1880. KÖNIGS, professeur suppléant au Collège de France, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1890. KÖBB (Gustaf), Gothenbourg (Suède).
1881. LACOR, professeur de Mathématiques, boulevard du Montparnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Tablat (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LÉVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 2, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1892. MANGEOT, docteur ès-sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, boulevard du Montparnasse, 141, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timofeïska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique), S. P.

Date
de
l'admission

1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris, S. P.
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **MOUTARD**, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **MUKHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (v'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. **OIDIO** (Enrico v'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barren-tin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **PARENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. **PAUTOXNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, lieutenant-colonel d'Artillerie, directeur de la Manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de Mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytech-nique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Cannes, à Grasse, S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. **PUTZ** (le général), rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RABAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supé-rieure, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris, S. P.
1872. **REBAUCOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROIART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. ROUCHÉ (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. ROUQUET, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Condorcet, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. RUSSO (Giovanni), professeur, palazzo Serravalle, via Azanci, 2, à Catanzaro (Italie).
1881. SAINT-PAUL (Duc de), lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1889. SARAZ, professeur de Mathématiques, rue Saint-Sulpice, 25, à Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Danneuil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1877. SÉGUY, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. SMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège), S. P.
1872. TANNERY (Paul), directeur des Manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris. S. P.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), contrôleur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger, S. P.
1882. TCHÉRICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1872. TERRIER, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1872. TISSERAND, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. VANDAME, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
1885. VANECEK (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université de Pise (Italie).

Date
de
l'admission.

1880. WALCKENAER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).
1882. WILSON, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Ostergade, 10, à Copenhague (Danemark).
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (réda- cteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 6g. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathe- matik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 13g.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Ma- thematik</i> (rédauteur M. Fuchs, Kronprin- zen Ufer, 24).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédauteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bo- logne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astrono- micas</i> (rédauteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédauteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (ré- dauteur Dr Osear Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédauteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédauteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate</i> .	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	d'Amérique.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	Russie.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaires français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Pétersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JANVIER 1893.

PRÉSIDENTE DE M. VICAIRE.

La Société procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Communications :

M. Fouret : *Sur certains complexes du second ordre qui jouent un rôle dans la théorie des moments d'inertie.*

M. Demoulin présente une observation sur le même sujet.

M. ÉMILE PICARD adresse la Note suivante :

Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes.

L'article très intéressant que M. Hurwitz vient de consacrer dans le dernier cahier des *Mathematische Annalen* aux transformations birationnelles des courbes en elles-mêmes me remet en mémoire une leçon que je fis sur ce sujet dans mon cours de 1889. Je m'étais simplement proposé de montrer comment on peut établir d'une manière immédiate ce théorème, énoncé, je crois, pour la première fois comme très probable par M. Klein, qu'il ne peut y avoir, pour $p > 1$, une infinité *discontinue* de transformations birationnelles d'une courbe en elle-même. Il suf-

fit, pour cela, de suivre absolument la même marche que j'avais suivie pour établir une proposition analogue sur les surfaces algébriques dans mon Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables (*Journal de Math.*, 1889); c'est cette démonstration que je voudrais rappeler ici rapidement.

On connaît le théorème de M. Schwarz, d'après lequel une courbe de genre supérieur à l'unité ne peut admettre une infinité de transformations birationnelles en elle-même *dépendant d'un paramètre arbitraire*. J'en ai donné (*loc. cit.*, Chap. III) une démonstration très simple, à l'aide de la considération des intégrales de première espèce.

C'est de ce théorème que peut se déduire immédiatement la proposition que nous avons en vue. Soit

$$f(x, y) = 0$$

une courbe de genre p ($p > 1$) et de degré m , admettant une infinité de transformations birationnelles en elle-même. Considérons p polynômes adjoints d'ordre $m - 3$ linéairement indépendants

$$Q_1(x, y), \quad Q_2(x, y), \quad \dots, \quad Q_p(x, y).$$

En désignant par (x, y) et (x', y') deux points correspondants dans une transformation, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} \frac{Q_1(x, y) dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} &= A_1 \frac{Q_1(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}} + \dots + A_p \frac{Q_p(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}}, \\ \frac{Q_2(x, y) dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} &= B_1 \frac{Q_1(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}} + \dots + B_p \frac{Q_p(x', y') dx'}{\frac{\partial f}{\partial y'}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

les A et les B étant des constantes. Il en résulte

$$(1) \quad \frac{Q_1(x, y)}{Q_2(x, y)} = \frac{A_1 Q_1(x', y') + \dots + A_p Q_p(x', y')}{B_1 Q_1(x', y') + \dots + B_p Q_p(x', y')}.$$

La transformation birationnelle (x, y) , (x', y') pourra donc être obtenue au moyen d'une équation de la forme (1), où les A et B sont des constantes convenables. Or, prenant *a priori* cette relation (1), on peut chercher à déterminer les constantes A et B de manière qu'elle détermine une transformation birationnelle entre les points (x, y) , (x', y') de la courbe proposée. On ob-

tiendra ainsi un certain nombre d'équations de conditions entre les A et les B; ou bien ces équations de conditions détermineront les A et les B, ou bien une ou plusieurs de ces lettres resteront arbitraires. Par conséquent, la transformation sera déterminée (c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un nombre limité de transformations), ou bien elle dépendra au moins d'un paramètre arbitraire. Mais, d'après le théorème de M. Schwarz, cette dernière circonstance ne peut se présenter, et la proposition se trouve par suite établie.

SÉANCE DU 18 JANVIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections : Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : MM. Buisson et Quintard, présentés par MM. Laisant et Élie Perrin; M. Hioux, présenté par MM. Laisant et Antomari.

Communications :

M. Demoulin : *Sur une classe particulière de courbes gauches.*

M. D'OCAGNE fait une Communication *Sur les suites récurrentes.*

Il résout d'abord le problème suivant : *Le polynôme générateur d'une suite récurrente étant décomposé en un produit de facteurs, exprimer son terme général en fonction des termes des suites ayant ces facteurs pour polynômes générateurs.*

Il établit ensuite ce théorème : *Toute fonction algébrique entière des intégrales de plusieurs suites récurrentes est elle-même l'intégrale d'une suite récurrente*; et montre comment on peut former le polynôme générateur de cette suite.

A titre de corollaire, il établit cette proposition :

Les puissances $x^{\text{èmes}}$ des nombres entiers, pris dans leur ordre naturel, forment une suite récurrente dont le polynôme générateur est $(x - 1)^{2p}$.

M. HUMBERT fait la Communication suivante :

Sur une propriété des cônes du second ordre.

LEMME. — *Toute courbe algébrique d'ordre pair $2p$, tracée*

sur un cône du second ordre, est l'intersection complète du cône et d'une surface d'ordre p .

Ce lemme est une conséquence immédiate d'une propriété des quadriques établie par Halphen dans le Tome I (p. 19) de ce Bulletin; on en déduit, en passant, que toute courbe d'ordre impair, $2p + 1$, tracée sur un cône du second ordre, forme, avec une génératrice quelconque du cône, l'intersection complète de cette surface et d'une surface d'ordre $p + 1$.

Si l'on observe maintenant qu'une courbe quelconque du cône, comptée deux fois, forme une courbe d'ordre pair, on a, en vertu du lemme, le théorème suivant, qui n'a peut-être pas été remarqué :

THÉORÈME. — *Le long de toute courbe algébrique tracée sur un cône du second ordre on peut circonscrire au cône une surface algébrique, ne coupant pas le cône en dehors de la courbe considérée.*

Cette dernière propriété, qui n'entraîne d'ailleurs pas les deux précédentes, est curieuse; elle n'appartient évidemment qu'à des surfaces exceptionnelles. Les quadriques générales, les cônes d'ordre supérieur à deux ne la possèdent pas. Dans un Mémoire qui doit paraître au Tome IX du *Journal de Mathématiques* nous montrerons qu'elle s'applique à la surface de Kummer, mais nous n'en connaissons pas d'autres exemples.

SÉANCE DU 1^{er} FÉVRIER 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Théorème sur le centre des moyennes distances.*

M. Fouret : *Sur le complexe tétraédral.*

M. Demoulin : *Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand.*

M. Humbert : *Évaluation de quelques aires sur le parabolôïde.*

M. Arnoux adresse une Note sur un appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs.

SÉANCE DU 13 FÉVRIER 1893.

PRÉSIDENTE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Caldarera, présenté par MM. Jordan et Fouret; M. l'abbé Rivereau, présenté par MM. Appell et Kœnigs; M. Passerat, présenté par MM. de Presle et Lucien Lévy.

Communications :

M. Bioche : *Sur les séries alternées.*

M. Bioche : *Sur les courbes anharmoniques.*

M. Demoulin : *Définition géométrique des complexes quadratiques dont la surface de singularités se décompose en une quadrique et deux plans.*

M. Humbert : *Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique.*

M. Carvallo présente à la Société un *Traité de Mécanique* qu'il vient de publier et signale certaines démonstrations contenues dans cet Ouvrage.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Théorème sur le centre des moyennes distances;

par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. *Considérant un polygone plan quelconque de n côtés, on réunit consécutivement ses sommets de k en k par des cordes de jonction. Sur ces diverses cordes on construit des polygones de p côtés, tous semblables entre eux, mais d'ailleurs sans aucune relation avec la forme du proposé. Le centre des moyennes distances des np sommets de ces n polygones sera toujours le même que celui des n sommets du proposé.*

Pour établir cette proposition, commençons par envisager le cas d'un triangle $M_i m_i M_{i+k}$, toujours semblable à lui-même. con-

raissent par suite identiquement. Chaque abscisse X_j figurera de son côté deux fois avec les coefficients

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

dont la somme se réduit à l'unité. Il vient dès lors simplement

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n.$$

2. Considérons maintenant un polygone de p côtés construit sur la corde $M_i M_{i+k}$, et réunissons chacun de ses $p - 2$ sommets m_i , autres que ceux M_i, M_{i+k} qui lui sont communs avec le proposé, à ces deux derniers par des droites de jonction. Ces divers points deviendront individuellement les sommets de triangles qui restent semblables à eux-mêmes quand on passe d'une corde à l'autre en faisant varier i . L'équation précédente leur est donc applicable, et l'on peut écrire en abrégé

$$\Sigma X_i = \Sigma x_i,$$

en étendant par la pensée la somme qui figure dans le second membre aux n sommets *homologues* d'un sommet choisi à volonté parmi les $p - 2$ non communs au proposé.

Écrivons cette égalité successivement pour ces $p - 2$ points, et encore pour les deux derniers qui fournissent à cet égard de simples identités. Ajoutant le tout membre à membre, on obtiendra

$$p \Sigma X = \Sigma \Sigma x,$$

ou, en divisant par np ,

$$\frac{\Sigma X}{n} = \frac{\Sigma \Sigma x}{np},$$

ce qui démontre la proposition, puisque l'axe des abscisses reste absolument quelconque.

3. Il serait aisé, au moyen d'hypothèses particulières, variées de diverses manières, de constituer certains énoncés plus simples et parfois plus expressifs. Quelques-uns d'entre eux ont même pu déjà se rencontrer, par exemple le suivant.

Faisons $k = 1$, de manière à prendre pour cordes les côtés eux-mêmes; et en second lieu $p = 3$, en réduisant à des triangles les polygones semblables entre eux. Nous retrouverons ainsi le théorème général de M. Laisant ⁽¹⁾.

(1) LAISANT, *Sur quelques propriétés des polygones* (Association française

4. On peut concevoir que des constructions convenablement imaginées aient pour résultat de réduire indéfiniment les dimensions du système quand on les répète successivement sur les polygones ainsi dérivés les uns des autres, et fassent converger ces derniers vers un point. S'il en est ainsi, ce point, quel que soit le mode de construction capable de cette particularité, ne pourra être que le centre des moyennes distances du polygone proposé.

Je citerai comme exemple cette remarque déjà connue ⁽¹⁾ que, si l'on joint ensemble les milieux des côtés d'un polygone, puis les milieux des côtés de cette nouvelle figure, et ainsi de suite indéfiniment, les polygones successifs tendent indéfiniment à se réduire au centre des moyennes distances des sommets du proposé.

Sur une classe particulière de courbes gauches;

par M. DEMOULIN.

1. Dans une Note intitulée : *Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches* ⁽²⁾, nous avons démontré le théorème suivant :

Lors du déplacement du trièdre principal relatif à une courbe à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit, par rapport à ce trièdre, un conoïde de Plücker.

pour l'avancement des Sciences, Comptes rendus du Congrès du Havre, 1877, p. 144).

Si en outre on aplatit le triangle sur sa base, on obtient une propriété identique pour le polygone formé par les points qui divisent dans un rapport fixe les côtés du polygone; en d'autres termes, pour des mobiles qui décriraient ces côtés uniformément, ou, plus généralement, avec des vitesses constamment proportionnelles à ces côtés, en partant tous à la fois des divers sommets pour atteindre ensemble le sommet suivant. [LAISANT, *Sur certaines propriétés des centres de gravité* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1882, t. X, p. 40). — LAQUIÈRE, *Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés du centre de gravité* (*Ibid.*, p. 132). — RESAL, *Note Sur la généralisation d'un théorème de Pappus* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XX, p. 337)].

Si l'on fait encore en particulier $n = 3$, en réduisant à un triangle le polygone proposé, l'on retrouve par cette voie un théorème de Pappus.

⁽¹⁾ D'OCAGNE, *Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 9^e année, 1885-1886, p. 237).

⁽²⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XX, p. 43.

Par des considérations de Géométrie cinématique, encore inédites, M. Mannheim a étendu ce théorème aux courbes de M. Bertrand. Nous nous proposons, dans cette Note, de chercher toutes les courbes jouissant de la propriété en question.

2. Soient Ox , Oy , Oz respectivement la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche (Γ). L'axe hélicoïdal, relatif au déplacement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites, a pour équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{z}{x} = -\frac{\tau}{\rho}, \\ y = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2 + \tau^2}, \end{cases}$$

ρ et τ désignant respectivement le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Γ) au point O .

Ces équations montrent que l'axe hélicoïdal coupe à angle droit la normale principale; par suite, si une courbe est telle que l'axe hélicoïdal instantané décrive, par rapport au trièdre principal, un conoïde de Plücker, ce conoïde admettra nécessairement l'axe des y comme ligne de striction.

3. Cherchons l'équation la plus générale d'un conoïde de Plücker occupant, par rapport aux axes des coordonnées, la position indiquée. L'équation la plus simple de ce conoïde est

$$axz + y(x^2 + z^2) = 0,$$

a désignant une constante. Si l'on imprime à cette surface un mouvement hélicoïdal mesuré par une translation α le long de l'axe des y et par une rotation ω autour de cet axe, l'équation du conoïde deviendra

$$a(x \cos \omega + z \sin \omega)(x \cos \omega - z \sin \omega) + (y - \alpha)(x^2 + z^2) = 0,$$

ou, après quelques réductions,

$$Axz + Bx^2 + Cz^2 + Dy(x^2 + z^2) = 0,$$

A , B , C , D désignant des constantes indépendantes.

4. Cela posé, remplaçons dans l'équation ci-dessus y et $\frac{z}{x}$ par les valeurs (1); il viendra

$$(2) \quad \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau^2} - \frac{C}{\rho\tau} + \frac{D}{\rho^2} = 0.$$

Cette relation caractérise complètement les courbes cherchées. L'hypothèse $B = 0$ donne les courbes de M. Bertrand :

$$A - \frac{C}{\tau} + \frac{D}{\rho} = 0.$$

3. Faisons, dans (2), $C = 0$; nous aurons

$$(2)' \quad \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau^2} + \frac{C}{\rho^2} = 0.$$

La courbe définie par cette équation constitue la solution la plus générale du problème suivant :

En un point O d'une courbe (Γ), on mène une normale OA faisant un angle constant avec la normale principale à la courbe (Γ) en ce point. On demande de trouver toutes les courbes (Γ) telles que les droites OA soient les binormales d'une autre courbe (Γ').

Soit O' le point où la droite OA s'appuie sur la courbe (Γ'). Posons $OO' = l$ et appelons (α, β, γ) les cosinus directeurs de la droite OA par rapport aux axes Ox, Oy, Oz du trièdre principal relatif au point O.

Rappelons maintenant quelques résultats concernant la théorie des courbes gauches. Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point O' par rapport aux axes du trièdre principal relatif à un point O d'une courbe gauche quelconque. Si ce trièdre se déplace de manière que la vitesse du point O soit constante et égale à l'unité, les composantes de la vitesse et de l'accélération du point O' seront

$$\begin{aligned} V_x &= 1 - ry + \frac{dx}{ds}, & J_x &= -rV_y + \frac{dV_x}{ds}, \\ V_y &= rx - pz + \frac{dy}{ds}, & J_y &= rV_x - pV_z + \frac{dV_y}{ds}, \\ V_z &= py + \frac{dz}{ds}, & J_z &= pV_y + \frac{dV_z}{ds}. \end{aligned}$$

Dans ces formules, s désigne l'arc de la courbe; on a posé, pour la simplicité,

$$r = \frac{1}{\rho}, \quad p = -\frac{1}{\tau}.$$

Dans le cas actuel,

$$x = 0, \quad y = l\beta, \quad z = l\gamma;$$

par suite

$$V_x = 1 - r l \beta,$$

$$V_y = -p l \gamma + \beta \frac{dl}{ds},$$

$$V_z = -p l \beta + \gamma \frac{dl}{ds}.$$

En exprimant que la vitesse du point O' est perpendiculaire à $O'O$, on trouve que l doit être constant; les composantes de la vitesse se réduisent donc à

$$(3) \quad \begin{cases} V_x = 1 - r l \beta, \\ V_y = -p l \gamma, \\ V_z = p l \beta. \end{cases}$$

On trouve ensuite, pour les composantes de l'accélération,

$$(4) \quad \begin{cases} J_x = l \gamma p r - l \beta r', \\ J_y = r(1 - l r \beta) - p^2 l \beta - l \gamma p', \\ J_z = -p^2 l \gamma + l \beta p', \end{cases}$$

les accents dénotant des dérivées relatives à l'arc.

La binormale à la courbe (Γ') au point O' est évidemment parallèle au vecteur dont les composantes N_x, N_y, N_z sont données par les formules

$$N_x = V_y J_z - V_z J_y,$$

$$N_y = V_z J_x - V_x J_z,$$

$$N_z = V_x J_y - V_y J_x.$$

A cause des relations (3) et (4), les valeurs de N_x, N_y, N_z peuvent s'écrire, toutes réductions faites,

$$(5) \quad \begin{cases} N_x = p l [p^2 l - \beta r(1 - \beta r l)], \\ N_y = p^2 l (\beta \theta' + \gamma), \\ N_z = r + p^2 r l^2 - 2 r^2 l \beta - l \beta p^2 + l^2 r^2 \beta^2 + p^2 \gamma l \theta', \end{cases}$$

pourvu qu'on pose

$$(6) \quad -l \beta \frac{r}{p} + \frac{1}{p} = \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \theta'.$$

Exprimons que la binormale de la courbe (Γ'') au point O' coïn-

cide avec $O'O$; nous aurons

$$\frac{N_x}{\alpha} = \frac{N_y}{\beta} = \frac{N_z}{\gamma},$$

ou, en tenant compte des formules précédentes,

$$\begin{aligned} p^2 l - \beta r(1 - \beta r l) &= 0, \\ \gamma^2 p l &= \beta(r + p^2 r l^2 - 2 r^2 l \beta - l \beta p^2 + l^2 r^3 p^2). \end{aligned}$$

Or il est aisé de voir que ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre. Les courbes cherchées sont donc définies par l'équation

$$(7) \quad \frac{\beta}{\rho} = l \left(\frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} \right),$$

laquelle a le même degré de généralité que l'équation (2)'.

Notre assertion se trouve donc justifiée.

Si $\beta = 1$, la droite OO' coïncide avec la normale principale Oy et l'équation (7) devient

$$\frac{1}{\rho} = l \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} \right).$$

Elle définit les courbes dont les normales principales sont les binormales d'une autre courbe.

6. Les formules établies au n° 5 permettent de résoudre un certain nombre de problèmes relatifs aux courbes gauches. Posons-nous, par exemple, cette question :

En un point O d'une courbe gauche (Γ), on mène une normale OA faisant avec la normale principale un angle constant. Trouver toutes les courbes (Γ) pour lesquelles les droites OA seront les normales principales d'une autre courbe (Γ').

Soit O' le point où la droite OA rencontre la courbe (Γ'). On démontrera, comme précédemment, que la longueur $OO' = l$ doit être constante. On achèvera d'exprimer toutes les conditions du problème en écrivant que la droite OO' est perpendiculaire à la binormale de la courbe (Γ') au point O' , ce qui donnera

$$\beta N_1 + \gamma N_2 = 0.$$

on, en tenant compte des formules (5),

$$(8) \quad \gamma r[(1 - r l^2)^2 + p^2 l^2] + p^2 l \theta' = 0.$$

En prenant pour θ une fonction arbitraire de l'arc s , les équations (6) et (8), résolues par rapport à r et à p , nous donneront la courbure et la torsion de toutes les courbes satisfaisant à la question. Nous trouverons ainsi

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{l \theta'}{\gamma (\theta^2 + l^2)},$$

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\theta} + \frac{l^2 \theta' \theta'}{\gamma \theta (\theta^2 + l^2)}.$$

Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique;
par M. G. HUMBERT.

Dans un Mémoire inséré aux tomes V et VI du *Journal de Mathématiques* (4^e série), j'ai donné une formule simple permettant d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire d'une calotte ellipsoïdale, limitée par une conique le long de laquelle le cône circonscrit à l'ellipsoïde est de révolution. La même méthode s'applique à l'évaluation d'une aire analogue sur le paraboloïde elliptique, mais le résultat est beaucoup plus simple, puisqu'on arrive, pour l'aire cherchée, à une expression algébrique et même rationnelle.

Voici la marche des calculs, qui sont tout à fait élémentaires.

Soit le paraboloïde elliptique

$$(1) \quad \frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0;$$

on suppose $p > 0$, $q > 0$ et $p > q$.

Le lieu des sommets des cônes de révolution *réels* circonscrits à la surface (1) est *une* des paraboles focales, ou plutôt la partie de la parabole extérieure à la surface; les équations de cette focale sont

$$(2) \quad y = 0, \quad z^2 - 2x(p - q) = p(p - q).$$

Le plan polaire P d'un point (x, z) de la courbe (2), par rap-

port au paraboloïde, a pour équation

$$(3) \quad X + Z \frac{z}{q} + x = 0;$$

proposons-nous d'évaluer l'aire de la zone comprise, sur le paraboloïde, entre ce plan P et le plan polaire P' d'un point

$$(x + dx, z + dz)$$

infinitement voisin de (x, z) , sur la parabole focale (2).

A cet effet, projetons la zone sur un plan normal à l'axe du cône de révolution de sommet (x, z) , circonscrit au paraboloïde : il est clair que l'aire de la projection est égale à la différence des aires des projections, sur le même plan, des sections faites dans le paraboloïde par les plans P et P'. Or, en appelant $d\sigma$ l'aire de la zone, et θ l'angle que les plans tangents au paraboloïde le long de la section P font avec l'axe du cône, on a, pour la zone projetée, la valeur $d\sigma \sin \theta$, et, en désignant par ω et $\omega + d\omega$ les aires des sections P et P', par λ et λ' les angles des plans P et P' avec l'axe du cône, il viendra

$$(4) \quad d\sigma \sin \theta = (\omega + d\omega) \sin \lambda' - \omega \sin \lambda.$$

L'axe du cône est la tangente en (x, z) à la parabole focale (2); ses équations sont donc

$$(5) \quad Y = 0, \quad X(p - q) - Zz + (p - q)(x + p) = 0$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{pz}{\sqrt{(z^2 + q^2)[z^2 + (p - q)^2]}}, \\ \sin \lambda' &= \frac{pz + (p - q)dz}{\sqrt{[(z + dz)^2 + q^2][z^2 + (p - q)^2]}}. \end{aligned}$$

Si l'on développe $\sin \lambda'$ suivant les puissances croissantes de dz , il vient, en négligeant les termes en dz^2 ,

$$\sin \lambda' = \sin \lambda + dz q \frac{q(p - q) - z^2}{(z^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}[z^2 + (p - q)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

$\sin \theta$ se calcule aisément; on trouve

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{p(p - q)}}{\sqrt{z^2 + (p - q)^2}}.$$

Enfin ω , aire de la section faite dans le parabolôide (1) par le plan (3), a pour expression

$$\omega = \pi \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{p - q} [z^2 - q(p - q)].$$

On aura $\omega + d\omega$ en changeant, dans cette expression, z en $z + dz$. Portons maintenant dans (4) les valeurs de $\sin\theta$, $\sin\lambda$, $\sin\lambda'$, ω et $\omega + d\omega$; il vient, en divisant tout par $[z^2 + (p - q)^2]^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} d\sigma \sqrt{p(p - q)} \frac{p - q}{\pi \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}}} &= - \frac{q}{(z^2 + q^2)} [z^2 - q(p - q)]^2 dz \\ &+ \frac{p z}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{z dz}{(z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} [z^2 - q(p - q)] \right. \\ &\quad \left. + (z^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z dz \right\}, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$d\sigma \frac{(p - q)^{\frac{3}{2}}}{\pi p} q^{\frac{3}{2}} = \frac{z^2 - q(p - q)}{(z^2 + q^2)} [z^2(p - q) + q^2(p - q)] dz + 2p z^2 dz,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p - q)^{\frac{3}{2}}} [(3p - q)z^2 - q(p - q)^2] dz.$$

On a ainsi l'expression de $\frac{d\sigma}{dz}$ en fonction *entière* de z ; on en déduit l'aire σ de la calotte de parabolôide qui a pour base le plan P :

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p - q)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p - q}{3} z^3 - q(p - q)^2 z \right] + \text{const.}$$

La constante se détermine en écrivant que σ est nul lorsque le plan P touche le parabolôide, c'est-à-dire lorsque le pôle (x, z) de ce plan est un des ombilics du parabolôide. Or les deux ombilics réels sont à l'intersection de la surface avec la focale (2); on trouve ainsi, pour le z de l'ombilic situé au-dessus du plan des xy ,

$$z = \sqrt{q(p - q)}:$$

et, par suite, on a, pour l'aire cherchée,

$$(6) \quad \sigma = \frac{\pi p}{p^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p-q}{3} z^3 - q(p-q)^2 z \right] - \frac{2}{3} \pi p q.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant, qui résume cette Note :

Soit un cône de révolution circonscrit au paraboloïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0 \quad (p > 0, \quad q > 0, \quad p > q):$$

son sommet est dans le plan $Y = 0$; désignons par x et z ses deux autres coordonnées, et supposons, par exemple, z positif. L'aire σ de la calotte de paraboloïde, qui a pour base le plan polaire du sommet du cône, est une fonction entière, du troisième ordre, de z , et elle est donnée par la formule (6).

Vérification. — Si le paraboloïde est de révolution, on a $p = q$ et z est toujours nul; l'aire σ se présente alors sous forme indéterminée. Mais, si l'on remplace z par sa valeur en fonction de x , tirée de (2), on trouve pour σ , dans le cas général,

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{3p-q}{3} (p+2x)^{\frac{3}{2}} - q(p-q)(p+2x)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{2}{3} \pi p q,$$

et si l'on fait $p = q$, il vient

$$\sigma = \frac{2}{3} \pi \sqrt{p} \left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right],$$

formule qui se vérifie sans difficulté, en cherchant l'aire engendrée par la révolution, autour de son axe, de la portion de la parabole

$$Y^2 + 2pX = 0,$$

qui est comprise entre le sommet et la droite polaire du point $(x, 0)$.

Expression de quelques nouvelles aires sur le parabolôïde elliptique; par M. G. HUMBERT.

Une formule que j'ai fait connaître ailleurs ⁽¹⁾ permet d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire comprise sur un ellipsoïde entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à une sphère, le centre de la sphère étant supposé sur un des axes de la quadrique.

En essayant d'appliquer cette formule au parabolôïde elliptique, j'ai reconnu que les fonctions elliptiques disparaissent et qu'on arrive à une expression rationnelle remarquablement simple; c'est cette expression qui va être donnée ici.

Voici la formule pour le cas de l'ellipsoïde :

Soit une sphère, de rayon R, dont le centre est situé à une distance l du centre d'un ellipsoïde, sur l'axe de longueur 2a; l'aire ellipsoïdale, s définie plus haut, a pour valeur

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{3}} (\zeta u + u) - 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{3}} (pu - 1) \frac{\varpi_1 u \varpi u}{\varpi_2 u \varpi_3 u} \\ &\quad - 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{3}} \frac{a^2}{l^2} \left(\frac{\varpi_1 u \varpi u}{\varpi_2 u \varpi_3 u} \right)^3 [3e_1 pu + e_1^2 + 2e_2 e_3]. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, les fonctions elliptiques dépendent des quantités e_1, e_2, e_3 ainsi définies

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= 1 - 3 \frac{b^2 c^2}{\rho}; & e^2 &= 1 - 3 \frac{a^2 c^2}{\rho}; & e_3 &= 1 - 3 \frac{a^2 b^2}{\rho}; \\ \rho &= a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2. \end{aligned} \right.$$

a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde; enfin u est le plus petit argument réel et positif déterminé par la relation

$$(3) \quad 3 \frac{l^2 - R^2}{R^2} \frac{b^2 c^2}{\rho} = pu - 1.$$

On doit, pour appliquer la formule, supposer que la sphère est extérieure à l'ellipsoïde, c'est-à-dire $l > a$ et $R < l - a$.

Pour passer au cas du parabolôïde, on doit remplacer dans ces formules l par $l_0 + a$, b^2 par ap , c^2 par aq et faire tendre a vers

(1) *Journal de Mathématiques*, t. VI (1^{re} série), p. 288.

l'infini; l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ a pour limite le parabolôïde elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} + 2x = 0.$$

La formule (3) s'écrit

$$3 \frac{a^2 + 2al_0 + l_0^2 - R^2}{a(p+q) + pq} \frac{pq}{R^2} = pu - 1$$

et, par suite, u tend vers zéro lorsque a tend vers l'infini. On tire de là le développement de a en fonction de u sous la forme

$$a = \frac{\alpha}{u^2} + \beta + \gamma u^2 + \dots;$$

si l'on porte cette valeur dans les relations (2), on obtient des développements analogues pour e_1, e_2, e_3 et φ ; si enfin on remplace dans l'équation (1) les quantités $a, e_1, e_2, e_3, \varphi$ par ces développements, et si l'on développe les fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de u , on arrive à une expression de la forme

$$s = \Lambda + Bu + \dots,$$

qui, pour $u = 0$, se réduit à $s = \Lambda$. Il est inutile d'entrer dans le détail des calculs, qui n'offrent aucune difficulté; la formule finale est la suivante

$$(1) \quad s = 2\pi \frac{R}{p^{\frac{3}{2}} q^{\frac{3}{2}}} \left[2p^2 q^2 + 2l_0 pq(p+q) + \frac{R^2}{3} (3p^2 + 3q^2 + 2pq) \right].$$

Ainsi :

L'aire s comprise sur le parabolôïde elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} + 2x = 0$$

entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite au parabolôïde et à une sphère de rayon R , ayant son centre sur l'axe du parabolôïde à une distance l_0 du sommet, est exprimée, en fonction rationnelle de R et de l_0 , par la formule (4).

On doit supposer la sphère extérieure au parabolôïde, c'est-à-dire $l_0 > \alpha$ et $R < l_0$.

Vérification. — Si le parabolôïde est de révolution, l'aire s est comprise entre deux parallèles et peut se calculer directement.

Considérons la parabole

$$y^2 + 2px = 0$$

et le cercle

$$(x - l_0)^2 + y^2 = R^2;$$

les tangentes communes à ces deux courbes touchent la parabole aux points dont les abscisses vérifient l'équation

$$(5) \quad p x^2 + 2x(p l_0 + R^2) + p(l_0^2 - R^2) = 0.$$

Soient, par ordre de grandeur croissante, x_1 et x_2 les deux racines de cette équation; sur le parabolôïde engendré par la rotation de la parabole autour de Ox , l'aire comprise entre les deux parallèles $x = x_1$ et $x = x_2$ a pour expression

$$s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{p^2 - 2px},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{2\pi}{3p} \left[(p^2 - 2px_1)^{\frac{3}{2}} - (p^2 - 2px_2)^{\frac{3}{2}} \right];$$

chacun des radicaux du second membre devant être pris positif. Or la relation (5) donne

$$(6) \quad p^2(x + l_0)^2 = R^2(p^2 - 2px);$$

d'ailleurs on vérifie que $-l_0$ est compris entre x_1 et x_2 et, par suite, on aura, en tenant compte de (6),

$$s = \frac{2\pi}{3p} \left[-\frac{p^3}{R^3}(x_1 + l_0)^3 - \frac{p^3}{R^3}(x_2 + l_0)^3 \right].$$

Ainsi s est une fonction symétrique entière de x_1 et x_2 ; le calcul se fait immédiatement et donne

$$s = \frac{2\pi p^2}{3R^3} (-12l_0 p R^3 - 6R^3 p^2 - 8R^6) \frac{1}{p^3},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{2\pi R}{p} \left[2p^2 + 4l_0 p + \frac{8}{3} R^3 \right],$$

formule qui coïncide avec la formule (4) où l'on a fait $p = q$. On a ainsi vérifié la relation (4) et, par contre-coup, l'équation (1).

Sur les courbes de Lamé; par M. R. GODEFROY.

Cette Note est relative aux rayons de courbure des courbes de Lamé et de leurs développées. J'ai déjà traité ce sujet [*Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, etc. (Journal de l'École Polytechnique, LXII^e Cahier)*]; mais je ne crois pas inutile d'y revenir, ces problèmes pouvant être résolus différemment, d'une manière un peu plus simple, et le résultat lui-même, dans le cas des développées, étant susceptible d'être présenté sous une forme nouvelle.

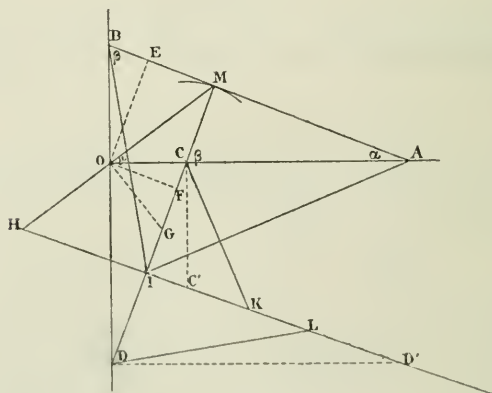
Rayon de courbure des courbes de Lamé. — Dans le Mémoire auquel il est fait allusion ci-dessus, le rayon de courbure des courbes de Lamé se déduit de l'expression du rayon de courbure de courbes plus générales : dans le cas spécial qui nous occupe, le procédé suivant conduit plus rapidement au résultat.

Prenons l'équation des courbes de Lamé (axes rectangulaires) sous la forme suivante

$$ax^m + by^m + c = 0.$$

Soit $M(x, y)$ le point de la courbe (fig. 1) pour lequel on

Fig. 1.



cherche l'expression du rayon de courbure $MI = R$. Il est inutile d'insister sur les notations et éléments divers dont on fera usage, tout étant suffisamment indiqué sur la figure.

On a

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{b}{a} \frac{y^{m-1}}{x^{m-1}},$$

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{y}{x},$$

par suite

$$(1) \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-1} \mu.$$

C'est cette relation entre les coefficients angulaires de la normale et du rayon OM qui est notre point de départ.

Différentiant (1), on obtient

$$(2) \quad \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = (m-1) \frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-2} \mu \frac{d\mu}{\cos^2 \mu};$$

mais

$$\frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-2} \mu = \frac{\frac{b}{a} \operatorname{tang}^{m-1} \mu}{\operatorname{tang} \mu} = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \mu}.$$

Cette valeur permet d'écrire (2) sous la forme

$$\frac{d\beta}{\sin \beta \cos \beta} = (m-1) \frac{d\mu}{\sin \mu \cos \mu}$$

ou

$$(3) \quad \frac{d\mu}{d\beta} = \frac{1}{m-1} \frac{\sin \mu \cos \mu}{\sin \beta \cos \beta}.$$

La perpendiculaire à OM au point O rencontrant la normale en G, on aura

$$\frac{d\mu}{d\beta} = \frac{R}{MG}.$$

On a de plus, dans les triangles OMA, OMB,

$$\frac{\sin \mu}{\cos \beta} = \frac{MA}{MO}, \quad \frac{\cos \mu}{\sin \beta} = \frac{MB}{MO}.$$

Ces valeurs étant portées dans (3), cette expression devient

$$(4) \quad R = \frac{1}{m-1} \frac{MA \cdot MB \cdot MG}{MO^2};$$

mais

$$\frac{OE}{MO} = \frac{MO}{MG}$$

ou

$$MO^2 = MG \cdot OE.$$

Portant dans (4) cette valeur de MO^2 , on a l'expression suivante du rayon de courbure

$$(5) \quad R = \frac{1}{m-1} \frac{MA \cdot MB}{OE},$$

forme obtenue par M. Fouret (*Comptes rendus*, 21 avril 1890).

Rayon de courbure des développées des courbes de Lamé.
— Ce problème est traité dans le Mémoire déjà cité, en partant directement de la formule qui précède. Ici nous commencerons par la mettre sous une forme un peu différente.

On a

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

ou

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD,$$

ce qui permet d'écrire (5) de la manière suivante

$$MI = \frac{1}{m-1} \frac{MC \cdot MD}{OE}.$$

C'est de cette expression que nous allons partir.

Soit $d\theta$ l'angle de contingence en M, on aura

$$(6) \quad \frac{\frac{dMI}{d\theta}}{MI} = \frac{\frac{dMC}{d\theta}}{MC} + \frac{\frac{dMD}{d\theta}}{MD} + \frac{\frac{dMF}{d\theta}}{MF}.$$

Les signes du deuxième membre sont ici ceux qui conviennent dans l'un des cas possibles de la figure. Il est bien entendu qu'il est indispensable, dans tous les cas, de prendre, avec des signes contraires, les segments croissant et décroissant (il est toujours aisé de les distinguer d'après la position des points où les normales menées à leurs extrémités rencontrent la normale à leur enveloppe).

Ceci posé, appelons R' le rayon de courbure de la développée au point I, et C', D', H, K, L les points où les perpendiculaires aux axes en C et D, la droite OM, et les perpendiculaires menées de C et D à FA et HB rencontrent la normale en I à la développée.

On a

$$\frac{dMI}{d\theta} = R'$$

et aussi

$$\frac{dMC}{d\theta} = IC', \quad \frac{dMD}{d\theta} = ID', \quad \frac{dMF}{d\theta} = OF.$$

Ces valeurs étant portées dans (6), la formule devient

$$(7) \quad \frac{R'}{MI} = \frac{IC'}{MC} + \frac{ID'}{MD} + \frac{OF}{MF};$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{IC'}{MC} &= \frac{IC}{MA} = \frac{IK}{MI}, \\ \frac{ID'}{MD} &= \frac{ID}{MB} = \frac{IL}{MI}, \\ \frac{OF}{MF} &= \frac{IH}{MI}. \end{aligned}$$

Portant ces expressions dans (7), on obtient

$$\frac{R'}{MI} = \frac{IK + IL + IH}{MI}$$

ou

$$R' = IK + IL + IH,$$

formule qui n'est vraie, dans tous les cas, que si l'on tient compte des prescriptions énoncées ci-dessus relativement aux signes des segments. Il serait plus juste d'écrire, en général, et à condition d'entendre comme il convient les doubles signes,

$$R' = \pm IK \pm IL \pm IH.$$

CAS PARTICULIER. — *Rayon de courbure de la développée de l'ellipse.* — Il est intéressant de déduire de ce qui précède l'expression du rayon de courbure de la développée de l'ellipse. Supposons menées de C et D les perpendiculaires à MI, qui rencontrent OM respectivement en N et P.

On sait, par une construction bien connue du centre de courbure de l'ellipse, que

$$CN = IC';$$

de même

$$DP = ID';$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{IC'}{MC} &= \frac{CN}{MC} = \frac{IN}{MI}, \\ \frac{ID'}{MD} &= \frac{DP}{MD} = \frac{IP}{MI}. \end{aligned}$$

On a, du reste,

$$\frac{OF}{MF} = \frac{IH}{MI};$$

la formule (7) devient alors

$$\frac{R'}{MI} = \frac{3 IH}{MI}$$

ou simplement

$$R' = 3 IH.$$

C'est la formule de Maclaurin.

Rayon de courbure de la développée de la développée de l'ellipse. — On sait (*loc. cit.*) comment on pourrait arriver à l'expression du rayon de courbure des développées des développées des courbes de Lamé. Cette recherche ne paraît pas devoir conduire, en général, à des résultats d'une interprétation commode. Le cas particulier de l'ellipse donne pourtant lieu à une construction extrêmement simple. C'est ce que nous allons montrer ⁽¹⁾.

On a

$$R' = 3 IH;$$

mais

$$\frac{IH}{OF} = \frac{MI}{MF} = \frac{MI}{OE};$$

par suite

$$R' = \frac{3 OF \cdot MI}{OE}.$$

On déduit de là

$$(8) \quad \frac{\frac{dR'}{d\theta}}{R'} = \frac{\frac{dOE}{d\theta}}{OE} + \frac{\frac{dMI}{d\theta}}{MI} \mp \frac{\frac{dOF}{d\theta}}{OF}.$$

Le signe — convient au cas où le point F se trouve entre les points M et I, le signe + au cas contraire.

Soit R'' le rayon de courbure de la deuxième développée, on a

$$\begin{aligned} \frac{dR'}{d\theta} &= R'', \\ \frac{dOE}{d\theta} &= OF, \quad \frac{dMI}{d\theta} = R', \quad \frac{dOF}{d\theta} = FI. \end{aligned}$$

(1) Le lecteur est prié de refaire la figure, dans le cas de l'ellipse, en ne traçant, outre les axes, la tangente et les normales à l'ellipse et à sa développée, que les droites OM, OE, OF.

La formule (8) peut alors s'écrire

$$(9) \quad \frac{R''}{R'} = \frac{OF}{OE} + \frac{R'}{MI} \mp \frac{FI}{OF}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{R''}{R'} &= \frac{R''}{3HI}, \\ \frac{OF}{OE} &= \frac{OF}{FM} = \frac{HI}{MI}, \\ \frac{R'}{MI} &= \frac{3HI}{MI}. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans (9), on obtient

$$(10) \quad \frac{R''}{3HI} = 4 \frac{HI}{MI} \mp \frac{FI}{OF}.$$

Menons de H une perpendiculaire à OM et une parallèle à OI. Soient P, Q les points où ces droites rencontrent la normale MI. On aura alors

$$\frac{HI}{MI} = \frac{IP}{IH}, \quad \frac{FI}{OF} = \frac{IQ}{IH}.$$

Moyennant ces valeurs, la formule (10) s'écrira

$$\frac{R''}{3HI} = 4 \frac{IP}{IH} \mp \frac{IQ}{IH}$$

ou

$$R'' = 12 IP - 3 IQ.$$

Prenons $IS = 4IP$, on a alors dans tous les cas

$$R'' = 3QS.$$

Le problème précédent a été résolu également par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, suppléments*) comme conséquence de la construction de la normale au lieu du point H, sommet du triangle HIM, pour lequel on connaît les normales aux courbes décrites par les deux autres sommets, et les points où les côtés touchent leurs enveloppes. La construction déduite de ces considérations est moins simple que celle qui vient d'être exposée.

*Sur les principes généraux de la Thermodynamique
et leur application aux corps élastiques ;*

par M. GUSTAVE CELLÉRIER.

Les recherches suivantes ont pour but de déterminer les équations générales permettant d'introduire, dans l'étude des corps élastiques, les termes d'ordres supérieurs au premier par rapport aux grandeurs des déformations. Les premiers paragraphes sont consacrés à quelques théorèmes relatifs à l'emploi des principes thermiques, en vue de préciser le nombre et le choix des variables indépendantes, ainsi que de connaître avec certitude le degré de généralité que l'on doit attribuer aux équations thermiques.

Nous cherchons ensuite la valeur du travail infinitésimal dégagé par l'élément de volume d'un corps parfaitement élastique, quand il passe d'un état déjà déformé à un état infiniment voisin. Et, en appliquant à cette expression les considérations préliminaires, nous pourrions déterminer, pour cette famille de corps, la forme la plus générale de la fonction caractéristique, des valeurs des pressions, et par suite des équations de l'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène inégalement déformé en ses divers points, sans restriction aucune sur l'ordre de grandeur des déformations.

Comme exemple d'utilité possible de ces équations, nous citerons leur application éventuelle à la Chronométrie, science dont les progrès incessants exigent de jour en jour des moyens plus précis.

1. — PRINCIPES FONDAMENTAUX.

Principe de l'équivalence. — Appelons dQ la quantité de chaleur reçue par un corps pendant une modification infinitésimale de son état, dL le travail dégagé, et A la constante numérique de l'équivalent calorifique du travail; considérons, pour ce corps, un *cycle fermé*, c'est-à-dire une série de modifications successives à la fin desquelles le corps se retrouve identiquement dans l'état où il était primitivement; le principe de l'équivalence s'exprime analytiquement en écrivant

$$(1) \quad \int (dQ - A dL) = 0.$$

où l'intégrale est étendue à toutes les évolutions successives du cycle que nous venons de définir.

Cette équation n'existe d'ailleurs que si la chaleur et le travail sont seuls en présence.

Principe de l'énergie intérieure. — Ce principe est une conséquence du précédent, participant de la sorte à sa généralité, indépendamment de toute autre conception. L'existence de l'énergie intérieure résulte des deux théorèmes suivants :

1° *L'expression* $dQ = A dL$ *a pour terme principal un polynôme différentiel de la forme* $X dx + Y dy + Z dz + \dots + R dr$, $x, y, z, \dots, r$ *étant les variables indépendantes qui déterminent l'état du corps.*

En effet, nous pouvons poser, entre deux états voisins,

$$dQ = A dL = f(x, y, z, \dots, r, dx, dy, dz, \dots, dr),$$

f convergeant vers une fonction homogène du premier ordre en dx, dy , etc. Formons un cycle infinitésimal, à partir de l'état $x, y, \dots, r$, dans lequel la première modification porte sur toutes les variables, qui deviennent $x + dx, y + dy, \dots, r + dr$, tandis que chacune des modifications suivantes n'affecte qu'une seule des lettres en lui rendant sa valeur primitive; ce cycle sera fermé; les valeurs successives de f seront

$$\begin{aligned} & f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr), \\ & f(x + dx, y + dy, \dots, r + dr, -dx, 0, 0, \dots, 0), \\ & f(x, y + dy, \dots, r + dr, 0, -dy, 0, \dots, 0), \\ & \dots\dots\dots, \\ & f(x, y, \dots, r + dr, 0, 0, \dots, -dr); \end{aligned}$$

et, en appliquant à ce cycle l'équation (1), négligeant les termes du deuxième ordre, on aura

$$\begin{aligned} & f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr) + f(x, y, \dots, r, -dx, 0, \dots, 0) + \dots \\ & \quad + f(x, y, \dots, r, 0, 0, \dots, -dr) = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à la forme énoncée

$$f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr) = X dx + Y dy + \dots + R dr.$$

$X, Y, \dots, R$ désignant des fonctions finies des variables.

2° *Sous cette dernière forme, $dQ = A dL$ est la différen-*

tielle exacte d'une fonction de $x, y, \dots, r$, que l'on désignera par AU, U étant l'énergie intérieure du corps.

Il suffit de prouver que $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, car on démontrerait de même les relations analogues pour les autres lettres. Faisant donc varier x et y seuls, traçant les points dont les coordonnées sont x, y , leur lieu, pour un cycle fermé, est une aire fermée, que nous pouvons prendre de dimensions infinitésimales; soit un point intérieur fixe x_0, y_0 , et posons $x = x_0 + \xi, y = y_0 + \eta$; nous aurons, pour ce point de la courbe, en négligeant le troisième ordre,

$$X dx + Y dy = \left(X_0 + \frac{\partial X_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_0}{\partial y} \eta \right) d\xi + \left(Y_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial Y_0}{\partial y} \eta \right) d\eta,$$

dont l'intégrale, en application de l'équation (1), se réduit à

$$\frac{\partial X_0}{\partial y} \int \eta d\xi + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \int \xi d\eta = 0.$$

Or $\int \eta d\xi, \int \xi d\eta$ sont, de signes contraires, égaux à l'aire infinitésimale, qui n'est pas nécessairement nulle; il en résulte, pour le point x_0, y_0 , la relation qu'il fallait prouver

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Conformément à la désignation ci-dessus, nous écrirons donc

$$(2) \quad dQ = A(dU + dL)$$

où dU seul représente une différentielle.

Principe de Carnot. — Ce principe n'existe que dans les cas où l'on peut regarder comme *réversibles* les modifications thermiques d'un corps. Il fait survenir l'existence d'une fonction toujours croissante avec la température, quantité que l'on adopte pour exprimer la mesure T de la température. Sa démonstration est d'ailleurs faite sur des bases incontestables, indépendamment du nombre ou de la nature des variables indépendantes.

Le cycle de Carnot est parfois appelé *cycle parfait*, ou *cycle de rendement maximum*; et quand le principe d'un moteur thermique réalise ce cycle, on regarde la machine comme théoriquement parfaite. Telle est l'application d'un corollaire soit du principe de

Carnot, soit de la méthode même de sa démonstration, corollaire qui peut s'exprimer ainsi : *Si, pour un cycle réversible fermé, la température d'un corps est comprise entre les extrêmes T' et T'' , le rendement de ce cycle ne peut être supérieur au rapport $\frac{T'' - T'}{T''}$, le cycle étant parcouru dans le sens qui rend positif le travail résiduel.*

2. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX POUR LES CHANGEMENTS RÉVERSIBLES.

A. — *Pour des modifications réversibles, la quantité dQ a pour terme principal un polynôme différentiel linéaire, tel que $X dx + Y dy + \dots + R dr$; dL par suite a la même forme.*

Cette propriété résulte du corollaire énoncé ci-dessus, appliqué à un cycle infinitésimal; pour un tel cycle, ΣdQ représente le travail, tandis que la chaleur fournie au corps peut s'exprimer par $\Sigma dQ'$; on a alors $\frac{\Sigma dQ}{\Sigma dQ'} < \frac{T'' - T'}{T''}$; or, ici, $T'' - T'$ est infinitésimal du premier ordre, $\Sigma dQ'$ également, de sorte que ΣdQ ne peut être que du deuxième ordre au moins; en posant

$$dQ = f(x, y, \dots, r, dx, dy, \dots, dr),$$

on démontrera, comme au n° 1, qu'aux termes près du deuxième ordre, dQ a la forme énoncée, et, à cause de l'équation (2), dL également.

B. — *L'expression $\frac{dQ}{T}$ est une différentielle exacte.*

D'après le théorème précédent, on a la forme

$$\frac{dQ}{T} = \frac{X dx + Y dy + \dots + R dr}{T}.$$

Concevons un cycle de Carnot où x et y varient seules; si T dépend de ces deux lettres ou de l'une d'entre elles, on peut démontrer le théorème comme dans le cas d'un fluide, où il n'y a que deux variables, et l'on a

$$\frac{\partial \left(\frac{X}{T} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{Y}{T} \right)}{\partial x}.$$

Si au contraire T est indépendant à la fois de x et y , pour tout cycle où $z, \dots, r$ restent constants, T ne varie pas; le rendement de ce cycle ne peut être supérieur à zéro, et par suite

$$\int (X dx + Y dy) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

et ce qui revient au même ici

$$\frac{\partial \left(\frac{X}{T} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{Y}{T} \right)}{\partial x}.$$

Ce résultat subsiste donc dans tous les cas, et l'ensemble des relations analogues en $z, \dots, r$ justifie l'énoncé du théorème.

Nous écrirons donc

$$(3) \quad dQ = AT d\omega, \quad dU + dL = T d\omega,$$

$d\omega$ étant la différentielle d'une fonction.

C. — Si le travail extérieur dL est exprimé par le polynôme $X dx + Y dy + \dots + R dr$, les lettres $x, y, z, \dots, r$ ne peuvent à elles seules déterminer l'état du corps.

En effet, la forme énoncée de dL résulte d'une forme primitive telle que $\Sigma P ds$, où les quantités P sont des projections de forces, et les quantités ds des arcs élémentaires décrits par les points de la surface du corps; si le corps ne subit aucune déformation, toutes les quantités ds sont nulles; et comme un des termes tels que $X dx$ provient du groupement d'un certain nombre de termes $P ds$, dx est nul dans le même cas, ainsi que $dy, dz, \dots, dr$. Dans l'hypothèse contraire à l'énoncé, dT serait nul aussi. Or on sait que l'on peut chauffer ou refroidir un corps sans qu'il subisse aucune déformation superficielle. Il existe donc d'autres variables indépendantes que $x, y, \dots, r$, pour déterminer soit la fonction T , soit l'état du corps.

D. — Si dL est exprimé par un polynôme de n termes, le nombre des variables peut être réduit à $n + 1$.

On posera

$$(4) \quad \omega T - U = \theta, \quad \text{d'où} \quad dL = d\theta - \omega dT,$$

θ étant une fonction dite *caractéristique*. Considérant $x, y, z, \dots, r, T$ comme variables indépendantes, et appelant $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les autres, cette nouvelle forme de dL conduit aux relations

$$(5) \quad X = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \dots, \quad R = \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial \theta}{\partial T}, \quad \alpha = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \dots,$$

et l'on voit que θ , et par suite $\omega, X, \dots, R, U$ sont indépendants de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. On obtient donc le résultat proposé en considérant θ comme fonction de $x, y, z, \dots, r, T$.

E. — *Les quantités T, θ, ω, U ne peuvent dépendre que de variables représentées dans l'expression du travail extérieur.*

Si α est une variable non représentée dans dL , elle ne saurait être $x, y, \dots$ ou r ; c'est donc T qui pourrait en dépendre; mais de ce que $\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0$, il résulte $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$, à cause des équations (5); cette lettre ne peut donc exister nulle part.

De ce théorème il est aisé de déduire le corollaire suivant :

Si l'expression de dL peut être ramenée à la forme $\lambda dx + \mu dy + \nu dz + \dots + \Re d\varphi$, où $\lambda, \mu, \nu, \dots, \varphi$ sont des fonctions de $x, y, \dots, r$, en nombre inférieur à celui de ces dernières variables, et où $\lambda, \mu, \nu, \dots, \Re$ sont des fonctions de $\lambda, \mu, \nu, \dots, \varphi, T$, les quantités $\theta, \dots$ seront des fonctions de $\lambda, \mu, \nu, \dots, \varphi, T$, sans dépendre autrement de $x, y, z, \dots, r$.

D'après ce qui précède les équations thermiques peuvent s'écrire

$$(6) \quad dL = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial r} dr,$$

$$(7) \quad \omega = \frac{\partial \theta}{\partial T}, \quad U = T \frac{\partial \theta}{\partial T} - \theta, \quad \theta = f(x, y, z, \dots, r, T).$$

$$(8) \quad dQ = \Lambda T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial T} dx + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial T} dy + \dots + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial T} dr + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} dT \right).$$

Dans ce qui suit, nous conserverons aux seules lettres $\Lambda, Q, L, U, T, \theta$ leur signification actuelle.

3. — TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE POUR LES CORPS ÉLASTIQUES.

On peut fixer, au point de vue physique, l'état d'un corps en le comparant à un état initial déterminé. Soient donc x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point matériel dans cet état initial; la position actuelle du même point, que nous désignerons par x, y, z , peut être représentée par diverses équations entre x, y, z, x_0, y_0, z_0 et un certain nombre de paramètres $\alpha, \beta, \dots$ indépendants de x_0, y_0, z_0 ; on pourra écrire

$$(g) \quad \begin{cases} x = F_1(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \dots), \\ y = F_2(x_0, y_0, \dots), \\ z = F_3(x_0, y_0, \dots). \end{cases}$$

Si le corps se déforme, ce sont les paramètres $\alpha, \beta, \dots$ qu'il faut faire varier dans ces équations, et non x_0, y_0, z_0 ; de sorte que les mouvements élémentaires des points sont exprimés par

$$(a) \quad \delta x = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \delta \beta + \dots \quad \text{ou} \quad \delta x = \sum \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \dots$$

Supposant donc x_0, y_0, z_0 éliminés entre ces six équations (g) et (a), l'on exprimera le résultat de cette élimination sous la forme

$$(b) \quad \delta x = f_1(x, y, z), \quad \delta y = f_2(x, y, z), \quad \delta z = f_3(x, y, z),$$

où les fonctions f_1, f_2, f_3 contiennent, outre x, y, z , les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma, \dots$

Il importe d'exprimer ici la valeur des dérivées de ces trois fonctions par rapport à x, y, z . Identifiant (a) et (b), on a

$$f_1 = \sum \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad f_2 = \sum \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \dots$$

d'où, regardant x_0, y_0, z_0 comme fonctions de x, y, z ,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \sum \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \delta \alpha,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial y_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial z_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_0} \right).$$

Nous représenterons les neuf dérivées des fonctions F_1, F_2, F_3

par les notations

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_x = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}, & \varphi_y = \frac{\partial F_1}{\partial y_0}, & \varphi_z = \frac{\partial F_1}{\partial z_0}, \\ \psi_x = \frac{\partial F_2}{\partial x_0}, & \psi_y = \frac{\partial F_2}{\partial y_0}, & \psi_z = \frac{\partial F_2}{\partial z_0}, \\ \gamma_x = \frac{\partial F_3}{\partial x_0}, & \gamma_y = \frac{\partial F_3}{\partial y_0}, & \gamma_z = \frac{\partial F_3}{\partial z_0}, \end{cases}$$

de sorte qu'on écrira

$$(c) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \delta \varphi_x + \frac{\partial y_0}{\partial x} \delta \varphi_y + \frac{\partial z_0}{\partial x} \delta \varphi_z,$$

Différentiant par rapport à x les équations (9), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \varphi_z \frac{\partial z_0}{\partial x}, \\ 0 &= \psi_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \psi_z \frac{\partial z_0}{\partial x} = \gamma_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial y_0}{\partial x} + \gamma_z \frac{\partial z_0}{\partial x}; \end{aligned}$$

d'où, posant pour abréger

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta = \varphi_x \psi_y \gamma_z + \varphi_y \psi_z \gamma_x + \varphi_z \psi_x \gamma_y \\ \quad - \varphi_x \psi_z \gamma_y - \varphi_y \psi_x \gamma_z - \varphi_z \psi_y \gamma_x, \end{cases}$$

on tire

$$(12) \quad \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z}.$$

On obtient donc en définitive pour la valeur (c) et ses analogues

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \delta \varphi_x + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \delta \varphi_z \right), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} \delta \varphi_x + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} \delta \varphi_z \right), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \delta \psi_x + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \delta \psi_y + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \delta \psi_z \right), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

On peut remarquer que les quantités $\varphi_x, \varphi_y, \dots, \gamma_z$ représentent les composantes de la dilatation du corps, de l'état initial à l'état actuel. Et si l'on désigne par v_0, v le volume spécifique pour ces deux états, on a tout d'abord

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\delta \Delta}{\Delta},$$

d'où, par intégration,

$$(14) \quad v = v_0 \Delta,$$

de sorte que Δ représente la dilatation en volume.

Considérons un élément de volume du corps, de poids ε , limité par une surface fermée ω . Soient x, y, z les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de ce volume; et $d\omega$ un élément superficiel dont les coordonnées actuelles sont $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$, et dont la normale extérieure fait avec les axes de coordonnées des angles de cosinus λ, μ, ν . En appelant $p_{\omega x}, p_{\omega y}, p_{\omega z}$ les composantes de la pression sur $d\omega$, une déformation infinitésimale développe sur cet élément superficiel un travail extérieur égal à

$$(d) \quad (p_{\omega x} \delta \xi + p_{\omega y} \delta \eta + p_{\omega z} \delta \zeta) d\omega.$$

L'intégrale de cette expression, étendue à toute la surface ω et divisée par ε , exprimera la valeur de dL , s'il n'y a pas d'autres forces extérieures.

On a du reste, ξ, η, ζ étant infinitésimaux,

$$\delta \xi = f_1(x, y, z) + \xi \frac{\partial f_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dots,$$

$$\delta \eta = f_2 + \xi \frac{\partial f_2}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_2}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots,$$

$$\delta \zeta = f_3 + \xi \frac{\partial f_3}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_3}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_3}{\partial z} + \dots$$

et, désignant d'ailleurs par $p_{xx}, p_{xy} \dots, p_{zz}$ les composantes de la pression au point x, y, z , nous aurons encore

$$p_{\omega x} = \lambda(p_{xx} + dp_{xx}) + \mu(p_{xy} + dp_{xy}) + \nu(p_{xz} + dp_{xz}), \dots$$

en faisant

$$dp_{xx} = \xi \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \eta \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + \zeta \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 p_{xx}}{\partial x^2} + \dots$$

.....

La quantité dL à obtenir étant une limite se rapportant à l'unité de poids d'un corps qui serait constitué identiquement à l'élément infinitésimal situé au point x, y, z , cette quantité est de même ordre que f_1, f_2, f_3 et leurs dérivées. Comme du reste la valeur de ε , qui doit diviser l'intégrale de l'expression (d), est du troisième degré par rapport à ξ, η, ζ , il sera inutile de conserver, dans (d), les termes de degré supérieur au troisième. De la sorte,

on ne gardera, dans le terme $p_{\omega, x} \delta z \, d\omega$, que l'expression

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\lambda p_{xx} + \mu p_{xy} + \nu p_{xz}) \left(f_1 + \xi \frac{\partial f_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) d\omega \\ & + (\lambda dp_{xx} + \mu dp_{xy} + \nu dp_{xz}) f_1 d\omega, \end{aligned} \right.$$

où $dp_{xx}, \dots$ seront remplacés par leurs termes du premier degré.

Pour l'évaluation d'intégrales telles que

$$(f) \quad \int \lambda \, d\omega, \quad \int \mu \, d\omega, \quad \int \lambda \xi \, d\omega, \quad \int \lambda \eta \, d\omega, \quad \dots,$$

l'on décompose ω en menant une infinité de prismes parallèles à l'un des axes de coordonnées, Ox par exemple, ces prismes ayant des dimensions transversales très petites par rapport à celles de ω . L'un quelconque d'entre eux, de section $d\omega'$, rencontre la surface fermée ω en un nombre pair de points, où λ sera alternativement positif et négatif; comme, au signe près, en ces points, $\lambda \, d\omega$ vaut $d\omega'$, et que η, ζ restent les mêmes, on a pour ces points

$$\Sigma \lambda \, d\omega = 0, \quad \Sigma \lambda \eta \, d\omega = 0, \quad \Sigma \lambda \zeta \, d\omega = 0,$$

tandis que $\Sigma \lambda \xi \, d\omega$ est la partie du volume du prisme commune au volume ε . Il en résulte que les seules intégrales (f) qui ne soient pas nulles sont

$$\int \lambda \xi \, d\omega, \quad \int \mu \eta \, d\omega, \quad \int \nu \zeta \, d\omega,$$

dont la valeur commune est égale au volume de l'élément, c'est-à-dire à $\varepsilon \nu$, ν étant le volume spécifique au point x, y, z .

On obtient alors, pour l'intégrale de l'expression (e)

$$(g) \quad \varepsilon \nu \left[p_{xx} \frac{\partial f_1}{\partial x} + p_{xy} \frac{\partial f_1}{\partial y} + p_{xz} \frac{\partial f_1}{\partial z} + f_1 \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) \right].$$

Or on sait que les pressions sont soumises aux équations

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = X, \\ & \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = Y, \\ & \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z, \end{aligned} \right.$$

où X, Y, Z représentent les forces étrangères, y compris l'inertie, rapportées à l'unité de volume.

Le dernier terme de l'expression (g) vaut donc $\varepsilon \mathbf{X} f_1$, ou $\varepsilon \mathbf{X} \partial x$, un des termes du travail des forces extérieures. L'ensemble des termes tels que (g) représentant le travail des pressions, il faut retrancher le travail des forces extérieures, qui est reçu par le corps, pour obtenir le travail élémentaire dL dégagé. Ce qui revient à faire abstraction de $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ dans les expressions (g) . Divisant ces dernières par ε , on aura alors

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} dL = \nu & \left[p_{xx} \frac{\partial f_1}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial f_2}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial f_3}{\partial z} + p_{yz} \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + p_{xz} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) + p_{xy} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

expression où les dérivées de f_1 , f_2 , f_3 doivent être remplacées par leurs valeurs (13).

4. — FONCTION CARACTÉRISTIQUE.

En faisant la substitution que nous venons d'indiquer, et remplaçant de plus $\frac{\nu}{\Delta}$ par la constante ν_0 , nous aurons

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} dL = \nu_0 & \left[\left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x,y}} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x,z}} \right) \delta \varphi_x \right. \\ & + \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{y,y}} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{y,z}} \right) \delta \varphi_y \\ & + \dots \dots \dots \\ & \left. + \left(p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + p_{yz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{y,z}} + p_{zz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{z,z}} \right) \delta \varphi_z \right]. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $\delta \varphi_x$, ... sont des variations relatives à un changement de l'état du corps, auxquelles on peut identifier celles désignées au n° 2 par dx , dy , ... Par suite l'équation (6) doit être identifiée à l'équation (17); et il résulte des considérations du n° 2 que la fonction caractéristique θ dépend de dix variables, qui sont φ_x , φ_y , φ_z , ..., $\varphi_{z,z}$, T , ainsi que les relations

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} &= \nu_0 \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x,y}} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{x,z}} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} &= \nu_0 \left(p_{xx} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + p_{xy} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{y,y}} + p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{y,z}} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} &= \nu_0 \left(p_{xz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + p_{yz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{y,z}} + p_{zz} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{z,z}} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour passer du premier système au second, on aura les formules de transformation telles que

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} = 2 \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi''}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} = \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} + 2 \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi''}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} = 2 \varphi_z \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \varphi_y \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} + \varphi_x \frac{\partial \theta}{\partial \varphi''}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

et inversement

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{2 \Delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \right) \\ = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \right), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Pour représenter géométriquement la déformation, on conçoit, dans l'état initial, une sphère infinitésimale qui devient un ellipsoïde dans l'état actuel; amplifiant leurs dimensions à une échelle telle que le rayon de la sphère soit représenté par l'unité de longueur, les trois rayons $M_0 A_0$, $M_0 B_0$, $M_0 C_0$ parallèles aux axes de coordonnées deviennent trois demi-diamètres conjugués MA, MB, MC de l'ellipsoïde, les points A, B, C ayant, relativement à M, des coordonnées

$$A : \varphi_x, \psi_x, \chi_x; \quad B : \varphi_y, \psi_y, \chi_y; \quad C : \varphi_z, \psi_z, \chi_z;$$

de sorte que les six variables φ , ψ , ..., χ' dépendent des éléments du tétraèdre MABC

$$\varphi = \overline{MA}^2, \quad \psi = \overline{MB}^2, \quad \chi = \overline{MC}^2, \quad \varphi' = \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cos \widehat{BMC}, \quad \dots$$

On peut tirer de là tous les angles du trièdre, et l'on trouve

$$\cos \widehat{BMC} = \frac{\varphi'}{\sqrt{\psi \chi}}, \quad \sin \widehat{BMC} = \sqrt{\frac{\varphi_1}{\psi \chi}},$$

où

$$\varphi_1 = \psi \chi - \varphi'^2, \quad \dots$$

et de même, pour le dièdre d'arête MA

$$\sin \widehat{MA} = \Delta \sqrt{\frac{\varphi}{\psi_1 \gamma_1}}, \quad \frac{\sin \widehat{MA}}{\sin \widehat{BMC}} = \Delta \sqrt{\frac{\varphi \psi \gamma}{\psi_1 \psi_1 \gamma_1}},$$

d'après l'identité

$$\Delta^2 = \varphi \psi \gamma - 2 \varphi' \psi' \gamma' - \varphi \varphi'^2 - \psi \psi'^2 - \gamma \gamma'^2.$$

Les axes de symétrie de l'ellipsoïde proviennent de trois diamètres rectangulaires de la sphère initiale. Soient ξ_0, τ_0, ζ_0 les coordonnées du sommet de l'un de ces diamètres, prises relativement à M_0 ; ξ, τ, ζ les valeurs actuelles de ces coordonnées relatives, pour le sommet correspondant de l'ellipsoïde; $\sqrt{\sigma}$ la longueur du demi-axe correspondant; on aura

$$\xi_0^2 + \tau_0^2 + \zeta_0^2 = 1, \quad \xi^2 + \tau^2 + \zeta^2 = \sigma,$$

$$\varphi \xi_0 + \gamma' \tau_0 + \psi' \zeta_0 = \sigma \xi_0,$$

$$\gamma' \xi_0 + \psi \tau_0 + \varphi \zeta_0 = \sigma \tau_0,$$

$$\psi' \xi_0 + \varphi' \tau_0 + \gamma \zeta_0 = \sigma \zeta_0,$$

et, posant

$$(25) \quad \begin{cases} \lambda = \varphi + \psi + \gamma, \\ \mu = \psi \gamma + \varphi \gamma + \varphi \psi - \varphi'^2 - \psi'^2 - \gamma'^2, \\ \nu = \varphi \psi \gamma + 2 \varphi' \psi' \gamma' - \varphi \varphi'^2 - \psi \psi'^2 - \gamma \gamma'^2, \end{cases}$$

les trois valeurs de σ résultent de l'équation

$$\sigma^3 - \lambda \sigma^2 + \mu \sigma - \nu = 0.$$

On a encore les relations

$$\xi \varphi_x + \tau \psi_x + \zeta \gamma_x = \sigma \xi_0,$$

$$\xi \varphi_y + \tau \psi_y + \zeta \gamma_y = \sigma \tau_0,$$

$$\xi \varphi_z + \tau \psi_z + \zeta \gamma_z = \sigma \zeta_0.$$

On peut aussi donner une interprétation géométrique aux dérivées de la fonction caractéristique.

Les angles que fait le plan BMC avec les plans coordonnés ont pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi_1}} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\psi_1}} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x}, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_x},$$

et, au moyen des équations (18), on trouve que

$$\frac{1}{2_0 \sqrt{\varphi_1}} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_x}, \quad \frac{1}{2_0 \sqrt{\psi_1}} \frac{\partial \eta}{\partial \psi_x}, \quad \frac{1}{2_0 \sqrt{\gamma_1}} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_x}.$$

sont les composantes de la pression sur le plan BMC; désignant par P_u la force qui agit ainsi sur le parallélogramme BMC, on aura, pour ses composantes,

$$P_{ux} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x}, \quad P_{uy} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y}, \quad P_{uz} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z},$$

et si v , w représentent les parallélogrammes CMA, AMB, on a de même

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} = v_0 P_{vx}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} = v_0 P_{vy}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} = v_0 P_{wz};$$

tandis qu'en décomposant les pressions normalement aux trois plans obliques, on obtient aisément

$$p_{uu} = \frac{v_0 \Delta}{v_0 \varphi_1} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1}, \quad p_{uv} = \frac{\Delta}{v_0 \sqrt{\varphi_1 \varphi_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1}, \quad p_{uw} = \frac{\Delta}{v_0 \sqrt{\varphi_1 \varphi_1}} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1};$$

on retrouve ici $p_{uv} = p_{vu}$, ce qui existe d'ailleurs pour un système d'axes quelconques.

§. — ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

Quand les divers points d'un corps élastique sont soumis à des pressions, dilatations ou températures différentes, les quantités φ_x , φ_y , ..., φ_z varient d'un point à l'autre. Toutefois, si le corps reste physiquement homogène, on doit regarder, pour tous les points, la fonction θ comme invariable de forme. Dans ce cas, les équations d'équilibre peuvent subir une transformation.

En général, si S est une fonction quelconque de x , y , z , on l'exprimera, au moyen des relations (12), en fonction de x_0 , y_0 , z_0 , par les identités telles que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial S}{\partial y_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial S}{\partial z_0} \right).$$

La première des équations (15) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta X = & \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial p_{xy}}{\partial x_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{xz}}{\partial x_0} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \frac{\partial p_{yx}}{\partial y_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{yz}}{\partial y_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{xz}}{\partial z_0} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{zx}}{\partial z_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{zy}}{\partial z_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \frac{\partial p_{zz}}{\partial z_0} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans le premier membre Δ par $\frac{\partial}{\partial_0}$ et en tenant compte des équations (18), on obtient

$$\mathfrak{u}X = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \right) - \mathfrak{u}_0 (G p_{x,x} + H p_{x,y} + K p_{x,z}),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} G &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_z} \right), \\ H &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \psi_z} \right), \\ K &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_z} \right). \end{aligned}$$

Or, en substituant

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_x} = \psi_y \zeta_x - \psi_z \zeta_y, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_y} = \psi_z \zeta_x - \psi_x \zeta_z, \quad \text{etc.,}$$

et en tenant compte des équations (10), il est aisé de voir que G, H, K sont identiquement nuls; de sorte que les équations d'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène seront les suivantes :

$$(26) \quad \begin{cases} \mathfrak{u}X = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_z} \right), \\ \mathfrak{u}Y = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi_z} \right), \\ \mathfrak{u}Z = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial f_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial f_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial f_z} \right). \end{cases}$$

Dans ces équations, il faudrait, par exemple, remplacer le terme

$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_x} \right)$ par l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x^2} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \varphi_y} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \varphi_z} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x_0 \partial z_0} \\ & + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \psi_x} \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \psi_y} \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial \psi_z} \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x_0 \partial z_0} \\ & + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial f_x} \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial f_y} \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_x \partial f_z} \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial x_0 \partial z_0}, \end{aligned}$$

le premier terme étant relatif au cas d'une température variable.

Si le corps est en mouvement, l'on remplacera de plus $\mathfrak{u}X$, $\mathfrak{u}Y$,

ou Z respectivement par

$$\frac{1}{g} \left(R_x - \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} \right), \quad \frac{1}{g} \left(R_y - \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{1}{g} \left(R_z - \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} \right),$$

R_x, R_y, R_z étant les composantes de la résultante des forces extérieures agissant sur l'unité de masse, g la constante de la pesanteur, et t le temps.

Il faudrait encore introduire, dans les équations (26), les dérivées $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \dots$, au lieu de $\frac{\partial \theta}{\partial z_x}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial z_z}$.

Les quantités $\frac{\partial T}{\partial x_0}, \frac{\partial T}{\partial y_0}, \frac{\partial T}{\partial z_0}$ dépendent de la manière dont la chaleur est distribuée à l'intérieur du corps. D'ailleurs l'équation (8) devient, pour le cas présent,

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} dQ &= \Lambda T \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right) \\ &= \Lambda T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z_x^2} \delta z_x + \dots + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_z^2} \delta z_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} \delta T \right) \\ &= \Lambda T \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \delta \varphi + \dots + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \delta \psi + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} \delta T \right). \end{aligned} \right.$$

La quantité dQ comprend ici deux parties : l'une est la chaleur fournie ou soustraite aux divers points du corps par des causes extérieures ; l'autre provient des phénomènes de conductibilité, par lesquels chaque élément du corps subit une action thermique des éléments avoisinants. Voici deux exemples de cas où l'on peut faire abstraction de la conductibilité.

Si les modifications du corps sont lentes et qu'il possède une température uniforme à chaque instant en tous ses points, les dérivées $\frac{\partial T}{\partial x_0}, \frac{\partial T}{\partial y_0}, \frac{\partial T}{\partial z_0}$ sont nulles, et les termes qui en dépendent sont détruits dans les équations (26), qui se réduisent ainsi à un système de trois équations à trois inconnues F_1, F_2, F_3 .

Si, au contraire, le corps subit une déformation très rapide, pendant un temps assez court pour que la conductibilité puisse être négligeable, et que d'ailleurs cette déformation soit adiabatique en tous points, on aura $dQ = 0$, et par suite

$$\delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right) = 0.$$

Si donc au commencement de la déformation $\frac{\partial \theta}{\partial T}$ vaut h , h pouvant du reste varier d'un point à l'autre, de la relation

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = h(x_0, y_0, z_0)$$

on devra tirer la valeur de T pour la substituer dans les équations (26).

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} MARS 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Caronnet : *Sur les hélicoïdes et sur un quadrilatère dont les quatre côtés sont fonctions l'un de l'autre et engendrent des congruences de normales.*

M. d'Ocagne : *Sur les machines à calculer.*

M. Carvallo : *Sur un groupe de théorèmes de Géométrie et de Mécanique représentés par la règle de multiplication des polynômes.*

M. DEMOULIN fait la Communication suivante :

Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant $2m + 1$ fonctions arbitraires.

L'équation dont il s'agit est la suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + f(z)(X_1 Y_1 + \dots + X_m Y_m),$$

où l'on représente par $f(z)$ une fonction quelconque de l'inconnue z , par $X_1, \dots, X_m$ des fonctions quelconques de x , par $Y_1, \dots, Y_m$ des fonctions quelconques de y .

L'intégrale générale de cette équation est donnée par la formule

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \int X_1 dx + \int Y_1 dy + \dots + \int X_m dx + \int Y_m dy + X + Y,$$

dans laquelle X et Y désignent deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

SÉANCE DU 15 MARS 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Humbert : *Sur les courbes de genre deux, dont une intégrale abélienne de première espèce est elliptique.*

M. Demoulin : *Sur la correspondance par orthogonalité des éléments.*

M. Mangeot adresse une Note intitulée : *De quelques propriétés des cubiques planes et gauches.*

M. RAFFY présente la remarque suivante *Sur une équation d'Euler :*

Connaissant une solution z de l'équation

$$(x-y)z''_{xy} - mz'_x + mz'_y = 0,$$

on en obtient une autre en prenant

$$z_1 = x^{-m}y^{-m} \int x^m y^m \left(\frac{z'_x}{x} dx + \frac{z'_y}{y} dy \right).$$

En répétant cette transformation on trouvera des solutions nouvelles dépendant linéairement d'autant de constantes arbitraires que l'on voudra.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

De quelques propriétés des cubiques planes et gauches :

par M. S. MANGEOT.

Je considère une cubique plane, et soit ABC le triangle formé par trois droites quelconques parallèles aux trois asymptotes de la courbe. Si l'on prend ce triangle comme triangle de référence, l'équation de la courbe peut s'écrire sous la forme

$$xyz + \varphi = 0,$$

φ étant une fonction du second degré où figurent les trois paramètres qui fixent la position du triangle ABC par rapport au triangle des asymptotes. Il est possible de disposer de ces para-

mètres de manière à faire disparaître trois termes de la fonction φ . Parmi les formes auxquelles cette opération la ramène, j'indiquerai les trois suivantes :

$$lyz + mzx + nxy, \quad lx^2 + my^2 + nz^2, \quad lx^2 + my^2 + n,$$

qui peuvent être obtenues, respectivement, de 3, 12 et 4 manières, et dont l'interprétation conduit aisément à ces propositions :

Parmi tous les triangles formés par des parallèles aux asymptotes d'une cubique, ou, plus généralement, par trois droites contenant trois points de la courbe donnés en ligne droite, il y en a trois qui sont inscrits dans la cubique, et douze qui ont tous leurs côtés divisés harmoniquement par la courbe.

On peut inscrire dans la cubique quatre parallélogrammes dont les diagonales soient parallèles à deux asymptotes, choisies à volonté, et, plus généralement, quatre quadrilatères dont les diagonales passent par deux points donnés P, Q de la courbe et dont les côtés opposés se coupent en deux points situés sur la droite PQ.

Je me bornerai à indiquer les calculs qui réduisent la fonction φ à la première des trois formes écrites, quand on part de l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

Soient

$$x_1 y_1 z_1 + A x_1 + B y_1 + C z_1 = 0,$$

$$x_1 = \lambda, \quad y_1 = \mu, \quad z_1 = \nu$$

les équations de la cubique et des droites BC, CA, AB, et soit

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 2h$$

la relation constante qui a lieu entre les variables x_1, y_1, z_1 . Rapportée au triangle ABC, la courbe sera définie par l'équation

$$(x + \lambda)(y + \mu)(z + \nu) + A(x + \lambda) + B(y + \mu) + C(z + \nu) = 0,$$

qui, sous la condition identique

$$(\mu\nu + A)x + (\nu\lambda + B)y + (\lambda\mu + C)z + \lambda\mu\nu + A\lambda + B\mu + C\nu = 0,$$

prend la forme voulue, et devient

$$(1) \quad \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} + 1 = 0.$$

L'identité posée exige, pour être satisfaite, que l'on ait, entre les trois paramètres λ , μ , ν et une inconnue auxiliaire S les quatre relations

$$\mu\nu = aS - A, \quad \nu\lambda = bS - B, \quad \lambda\mu = cS - C, \quad \lambda\mu\nu = hS$$

L'équation qui détermine S est dès lors

$$(aS - A)(bS - B)(cS - C) = h^2 S^2,$$

et les valeurs de λ , μ , ν sont $\frac{hS}{aS - A}$, $\frac{hS}{bS - B}$, $\frac{hS}{cS - C}$. Aux trois valeurs de S correspondent trois triangles inscrits dans la cubique.

La forme de l'équation (1) met en évidence des propriétés de la cubique que je vais faire connaître. Le triangle inscrit ABC, auquel la courbe est ici rapportée, et dont les côtés BC, CA, AB sont parallèles aux asymptotes B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 , est inscrit également dans la conique qui correspond à l'équation

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} = 0.$$

Les deux courbes se touchent aux trois sommets A, B, C. Les tangentes bc , ca , ab en ces points vont passer par les points p , q , r où la cubique coupe ses asymptotes, et leurs six autres points d'intersection avec ces asymptotes sont situés deux à deux sur trois droites parallèles à celles-ci et symétriques de celles-ci par rapport aux droites BC, CA, AB. Les trois points où ces mêmes tangentes bc , ca , ab rencontrent les droites BC, CA, AB appartiennent à une parallèle à la droite pqr , droite dont l'équation est

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} + 1 = 0.$$

On voit encore que les droites Aa , Bb , Cc passent par les sommets A_1 , B_1 , C_1 du triangle des asymptotes, et enfin que celles de toutes les droites précédemment dénommées qui contiennent les sommets du triangle ABC forment trois faisceaux harmoniques autour de ces points.

Dans le cas où le triangle formé par les asymptotes se réduit à un point, on a cette propriété :

Quand les trois asymptotes d'une cubique passent par un même

point, leurs six points de rencontre avec un triangle inscrit dont les côtés leur soient parallèles, et leurs six points d'intersection (autres que ceux situés sur la courbe) avec les tangentes aux sommets de ce triangle, sont respectivement les sommets de deux hexagones homothétiques l'un de l'autre par rapport au point de concours des trois asymptotes, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

Les résultats énoncés ci-dessus sont susceptibles d'une généralisation que met en évidence la projection conique de la cubique, et l'on peut formuler ce théorème :

Trois points p, q, r d'une cubique plane étant pris en ligne droite d'une manière quelconque, si, parmi les douze tangentes à la courbe issues de ces points, on en prend trois quelconques B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 dont les points de contact α, β, γ soient en ligne droite (ce qui est réalisable de seize manières), les neuf autres tangentes peuvent se partager en trois groupes de trois droites formant un triangle abc qui possède les propriétés suivantes, en désignant par A, B, C les points de contact de ses côtés bc, ca, ab .

Les tangentes bc, ca, ab rencontrent respectivement les droites BC, CA, AB en trois points situés sur une même droite, et celle-ci passe au point de concours des deux droites pqr et $\alpha\beta\gamma$. Les points communs aux deux triangles $abc, A_1B_1C_1$, et autres que p, q, r , étant joints deux à deux convenablement, donnent trois droites $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ qui contiennent les points α, β, γ . Les droites Aa, Bb, Cc concourent en un même point, en allant passer par les points A_1, B_1, C_1 . Toutes les droites précédemment désignées, autres que pqr , et dont le nombre est égal à 16, forment six faisceaux harmoniques autour des six points $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$.

Une extension de ce théorème aux cubiques gauches, déduite aussi de la méthode projective, donne lieu à cette proposition :

Soient α, β, γ trois points quelconques d'une cubique gauche; S un point quelconque du plan $\alpha\beta\gamma$; $SA_1B_1C_1$ le trièdre, de sommet S , dont les faces ont dans leurs plans les tangentes à la courbe aux points α, β, γ ; p, q, r les trois points,

autres que α, β, γ , où ces trois plans coupent la cubique. Parmi les trièdres que forment les plans tangents menés à la cubique par les droites Sp, Sq, Sr , il y en a trois, tels que $Sabc$, satisfaisant aux conditions suivantes, en appelant A, B, C les points de contact des plans Sbc, Sca, Sab :

Les plans des faces du trièdre $SABC$ passent par les points α, β, γ . Les arêtes des trois trièdres $SABC, SA_1B_1C_1, Sabc$ sont trois par trois dans un même plan, et ces trois plans se coupent suivant une même droite. Les trois droites d'intersection des deux trièdres $SABC, Sabc$, autres que SA, SB, SC , sont dans un même plan. Les deux trièdres $SA_1B_1C_1, Sabc$ ont six droites communes (autres que Sp, Sq, Sr) qui sont deux à deux dans trois plans passant par les points α, β, γ . Enfin, tous ceux des plans précédents, qui contiennent l'une ou l'autre des droites $S\alpha, S\beta, S\gamma, SA, SB, SC$, forment, autour de ces six droites, six faisceaux harmoniques.

A ce même théorème sur les cubiques planes correspond également une proposition concernant les cônes du troisième ordre. On voit facilement la modification qu'il faut apporter à l'énoncé du théorème pour obtenir celle-ci ; les points et les droites doivent être remplacés respectivement par des droites et des plans qui contiennent le sommet du cône ; les points et les tangentes de la cubique deviennent des génératrices et des plans tangents du cône.

Je terminerai par la remarque suivante, à laquelle conduit l'interprétation de l'équation (1) dans le cas général.

Une cubique, plane ou gauche, est le lieu d'un point tel que les rapports de trois constantes aux distances de ce point à trois plans fixes parallèles à une même droite (quelconque d'ailleurs) aient une somme égale à l'unité. Les trois plans fixes sont parallèles aux trois asymptotes de la courbe : les trois constantes sont les distances de ces asymptotes aux trois plans. Chacun des rapports est précédé d'un signe : dans le cas des figures réelles, c'est le signe $+$ ou bien le signe $-$ suivant que les deux distances qui figurent dans le rapport sont ou ne sont pas dirigées dans le même sens.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 AVRIL 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. D. André : *Sur les séquences des permutations circulaires.*

M. Raffy : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Humbert : *Évaluation de certaines aires sphériques et de certaines aires découpées sur le cylindre de révolution.*

M. V. SCHLEGEL adresse la Communication suivante :

*Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière,
relatif au centre des moyennes distances.*

Ce beau théorème ⁽¹⁾, curieux également par la généralité de son objet et la simplicité de sa forme, se démontre d'une manière assez élégante, sans coordonnées ni lignes auxiliaires, à l'aide d'une méthode que j'ai exposée dans mon Ouvrage *System der Raumlehre*, Leipzig, 1872 (t. I, p. 51). Cette méthode est au fond la même que j'ai appliquée (t. X, p. 220 de ce *Bulletin*) à un théorème de M. Laisant, cité aussi par M. de la Goupillière. En voici l'application.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les sommets d'un polygone quelconque. Alors le centre de gravité (M) de ces points est déterminé (selon les principes de M. Grassmann) par la formule

$$(1) \quad M = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}.$$

Soit en outre

$$(2) \quad AC = A_{1+sr} A_{1+s+1-r}$$

une diagonale joignant deux de ces sommets séparés l'un de l'autre par $r - 1$ sommets, et

$$(3) \quad B = P_s$$

(1) Voir page 5 du présent Volume.

mule (1) le centre des points $P_0, P_1, \dots$, multiplié par n , savoir le centre de tous les np sommets des polygones construits sur les diagonales du polygone donné. De même le second membre représente le centre des sommets de ce dernier polygone, multiplié par n ; et l'équation (11) exprime que ces centres coïncident.

Si la série des diagonales, rentrant sur elle-même, ne rencontre pas tous les sommets, le théorème vaut également pour l'ensemble de ces séries épuisant tous les sommets, comme pour chacune de ces séries. Enfin on peut remplacer, dans les équations précédentes, tous les points par leurs projections normales ou obliques (parallèles à une direction quelconque) faites sur une droite quelconque, ou par les distances mesurées entre chaque point et sa projection.

SÉANCE DU 19 AVRIL 1893.

PRÉSIDENCE DE M. DE COMBEROUSSE.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. L. Gérard, présenté par MM. Demoulin et Raffy ; M. de la Vallée Poussin, présenté par MM. Demoulin et d'Ocagne ; M. le lieutenant-colonel Touche, présenté par MM. Félix Lucas et Humbert ; M. Mathé, présenté par MM. Désiré André et Appell.

Communications :

M. Carvallo : *Théorie du pied équilibriste du gyroscope Ger-sat.*

M. Autonne : *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation du premier ordre.*

M. Broche fait la Communication suivante :

Sur les normalies des courbes.

J'ai déjà fait remarquer que les développables passant par une courbe peuvent être considérées comme des surfaces réglées ayant une courbure totale nulle tout le long de cette courbe, et que, par suite, on peut généraliser certaines propriétés en considérant des surfaces qui ont tout le long de la courbe une courbure fonc-

tion de l'arc, les développables correspondant au cas où cette fonction serait identiquement nulle.

Si l'on étudie, à ce point de vue, les surfaces engendrées par des normales à une courbe (surfaces que j'appellerai *normalies*), on obtient les résultats suivants :

THÉORÈME. — *Si deux normalies ont même courbure tout le long de leur directrice, elles se coupent sous un angle constant (c'est la propriété bien connue des normalies développables), ou bien elles admettent pour bissectrices des normalies développables.*

THÉORÈME. — *Si deux normalies se coupent sous un angle constant, elles ont même courbure tout le long de leur directrice.*

En particulier, si l'une est développable, l'autre l'est aussi, comme on le sait.

Si l'on considère les normalies engendrées par des droites faisant un angle constant avec la normale principale, ces normalies ont toutes, le long de la directrice, même courbure que la surface des normales principales et que celle des binormales. On sait que la valeur absolue de la courbure est pour ces surfaces le carré de la torsion de la directrice.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les involutions linéaires; par M. MAX GENTY.

1. Nous avons donné, l'année dernière (t. XX du *Bulletin*, p. 106), quelques théorèmes, connus pour la plupart, sur les involutions linéaires d'espèce quelconque, et nous nous sommes surtout attaché à ne faire dépendre ces propriétés géométriques que d'un seul lemme analytique, le principe de correspondance de Chasles.

Nous allons donner ici un théorème qui résout dans toute sa généralité le problème des points multiples d'une involution li-

néaire. Ce théorème conduit donc aux propositions que nous avons données précédemment, et qui n'en sont que des cas particuliers.

2. Soit une involution linéaire de degré n et d'espèce k , que nous représenterons, d'après la notation de M. Guccia, par I_n^k , et soient s nombres positifs $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_s$ inégaux deux à deux, satisfaisant à la condition unique

$$\sum_{i=1}^{i=s} k_i = k.$$

Le théorème que nous allons démontrer consiste en ce qu'il existe un nombre fini de groupes de l'involution donnée possédant s points multiples d'ordres respectifs $[k_{i+1}]_{i=1}^{i=s}$. Le nombre de ces groupes est égal à

$$(k_1+1)(k_2+1) \dots (k_s+1)(n-k)(n-k-1) \dots (n-k-s+1),$$

ou encore à

$$\prod_{i=1}^{i=s} (k_i+1) \frac{(n-k)!}{(n-k-s)!}.$$

Nous désignerons, pour abréger, par $u_{n-k_1, k_2, \dots, k_s}^k$ le nombre cherché. Remarquons d'abord que le théorème a déjà été démontré dans les cas de $s=1$, $s=2$, $s=k$. Ce dernier cas, en particulier, correspond au théorème de M. Émile Weyr.

Ceci posé, tous les termes de l'involution I_n^k ayant, en un point donné A, un point multiple d'ordre k_s , appartiennent à une involution $I_{n-k_s}^{k-k_s}$; et il existe $u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ groupes de cette involution possédant $s-1$ points multiples d'ordres respectifs $[k_i+1]_{i=1}^{i=s-1}$. En dehors de ces points multiples et du point A, tous ces groupes de I_n^k déterminent donc $(n-k-s+1) u_{n-k_s}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ points M qui correspondent au point A. Il faut déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M.

Or, le point M étant donné, les groupes de l'involution I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} , et il existe $u_{n-1}^{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ groupes de cette involution ayant s points multiples d'ordres respectivement égaux à $k_1+1, k_2+1, \dots, k_{s-1}+1, k_s$. Nous avons donc, d'après le principe de correspondance de

En tenant compte de la remarque faite à la suite du théorème, nous en déduisons

$$u_{2n}^2 = \frac{9}{2}(2n-1)(2n-5) = 9(n-2)(2n-5).$$

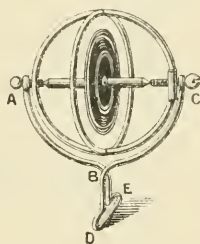
En particulier, si $n = 3$, le nombre précédent se réduit à 9. Nous obtenons donc sans calcul et très facilement la proposition géométrique suivante : *Toute cubique gauche possède 9 couples de cercles osculateurs situés sur une même sphère.*

Théorie du pied équilibré du gyroscope Gervat;

par M. E. CARVALLO.

1. *Description de l'appareil.* — Le pied équilibré ABCDE (fig. 1) est formé d'un fil métallique de 1^{mm},5 de diamètre environ. Il se compose à peu près d'un demi-cercle vertical ABC muni, au bas, d'un appendice BDE qui a pour but de le faire re-

Fig. 1.



poser, sur le plan horizontal, par la partie DE qui est rectiligne et perpendiculaire au plan du cercle ABC. En A et C, le fil est doublement recourbé de façon à former deux coussinets qui reçoivent les extrémités de l'axe de la toupie gyroscopique. Dans cette position, le plan moyen du tore de la toupie passe par DE.

Si la toupie ne tourne pas, l'équilibre est instable, le tout bascule autour de DE. Mais si la toupie tourne sur elle-même avec une grande vitesse (environ 50 tours par seconde), le système semble être en équilibre stable. De là le nom de *pied équilibré* donné par l'inventeur à ce jouet. En réalité, le pied exécute autour de la position apparente d'équilibre des oscillations manifes-

1^o Théorème des quantités de mouvement projetées sur le plan horizontal;

2^o Équation d'Euler, pour l'axe Gy' de la toupie;

3^o Théorème du moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale du point G;

4^o Théorème des forces vives.

I. Le premier principe nous apprend que la projection horizontale du point G est fixe, ce qui détermine la vitesse v du point O en fonction des autres inconnues. Mais l'expérience (et, comme on va le voir, le calcul) montre que θ ne s'écarte jamais sensiblement de θ_0 . Il en résulte que le point O restera sensiblement fixe. Nous laisserons de côté ce mouvement qui est le plus fortement troublé par les frottements négligés.

II. *La rotation de la toupie autour de son axe Gy' se compose de deux parties : sa rotation relative ω , puis la rotation de la monture dont la composante suivant Gy' est $+r \sin \theta$.*

D'autre part, les moments d'inertie A et C sont égaux et, de plus, le moment de la force P, par rapport à Gy' , est nul. L'équation d'Euler, pour l'axe Gy' , est donc

$$B \frac{d}{dt} (\omega + r \sin \theta) = 0.$$

Cette équation s'intègre et donne

$$(1) \quad \omega + r \sin \theta = \omega_0.$$

III. *Le moment de la force P par rapport à la verticale étant constamment nul, le moment des quantités de mouvement est constant.* Or les rotations sont n , r et ω , et leurs composantes suivant les axes principaux d'inertie du point G sont

$$n, \quad p = \omega + r \sin \theta, \quad q = r \cos \theta.$$

Les moments principaux d'inertie sont donc, en remplaçant $\omega + r \sin \theta$ par sa valeur ω_0 ,

$$An, \quad B\omega_0, \quad Cr \cos \theta.$$

Le moment d'inertie par rapport à la verticale du point G sera, en remplaçant C par son égal A ,

$$B\omega_0 \sin \theta + A r \cos^2 \theta.$$

En exprimant que ce moment est constant, il vient

$$B \omega_0 (\sin \theta - \sin \theta_0) + A r \cos^2 \theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad r = - \frac{B \omega_0 (\sin \theta - \sin \theta_0)}{A \cos^2 \theta}.$$

IV. *L'accroissement de force vive*, depuis l'état initial, est égal au travail de la pesanteur, savoir :

$$P a (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Cette force vive se compose de celle du point G, qui est (1)

$$\frac{P}{2g} a^2 n^2 \sin^2 \theta,$$

et de celle des trois rotations

$$n, \quad p = \omega_0, \quad q = r \cos \theta.$$

La force vive de la rotation résultante est

$$\frac{1}{2} [A n^2 + B \omega_0^2 + C r^2 \cos^2 \theta].$$

L'accroissement de la force vive totale, depuis l'état initial, est donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P}{g} a^2 n^2 \sin^2 \theta + A n^2 + C r^2 \cos^2 \theta \right),$$

et le théorème des forces vives donne, en remplaçant C par son égal A,

$$\left(\frac{P}{g} a^2 \sin^2 \theta + A \right) n^2 + A r^2 \cos^2 \theta = 2 P a (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Si, dans cette équation, je remplace r par sa valeur (2), j'obtiens, pour déterminer n , la formule

$$(3) \quad n = \pm \sqrt{\frac{2 P a (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \frac{B^2 \omega_0^2}{A \cos^2 \theta} (\sin \theta - \sin \theta_0)^2}{A + \frac{P}{g} a^2 \sin^2 \theta}}.$$

Les formules (1), (2), (3) résolvent le problème.

(1) La projection horizontale du centre de gravité étant fixe, la vitesse se réduit à sa composante verticale.

4. *Conséquences de la formule (3).* — Elle montre que θ ne peut jamais différer de θ_0 que d'une quantité très petite; car, si l'on attribue à θ une valeur notablement différente de θ_0 , le second terme du numérateur devient prépondérant à cause de la grandeur du coefficient $\frac{B^2 \omega_0^2}{\Lambda}$ qui, pour la vitesse normale de 50 tours par seconde, vaut environ 7000 fois le coefficient $2Pa$. Il en résulterait pour n une valeur imaginaire, ce qui est inadmissible. On peut alors se rendre compte du mouvement ainsi : au début, n et r étant nuls, la pesanteur tend à augmenter θ ; $n = \frac{d\theta}{dt}$ prend donc des valeurs positives jusqu'à ce que θ atteigne la valeur θ_1 qui annule le radical. Alors θ ne peut plus augmenter. Il diminuera, n prendra des valeurs négatives jusqu'à ce que θ reprenne la valeur θ_0 , et ainsi de suite. La toupie oscillera donc entre l'azimut initial θ_0 et un azimut très voisin $\theta_1 = \theta_0 + \varepsilon_1$.

5. *Intégration approchée des équations (2) et (3).* Ces prévisions conduisent à chercher des formules approchées en prenant pour inconnue (*)

$$\varepsilon = \theta - \theta_0,$$

d'où l'on tire

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon,$$

$$\cos \theta_0 - \cos \theta = \varepsilon \sin \theta_0 + \dots,$$

$$\sin \theta - \sin \theta_0 = \varepsilon \cos \theta_0 + \dots$$

En portant ces valeurs dans la formule (3), on peut mettre celle-ci sous la forme

$$n = \pm \beta \sqrt{x(\varepsilon \sin \theta_0 + \dots) - \frac{\varepsilon^2 \cos^2 \theta_0 + \dots}{\cos^2 \theta}},$$

dans laquelle on a posé

$$\beta = \frac{B \omega_0}{\sqrt{\Lambda \left(\Lambda + \frac{P}{g} \alpha^2 \sin^2 \theta \right)}}, \quad x = \frac{2P \alpha \Lambda}{B^2 \omega_0^2}.$$

Cette formule met en évidence que la valeur ε_1 de ε , qui annule le radical, est du même ordre de petitesse que $x \sin \theta_0$; et, d'après

(*) J'emprunte cette transformation au Cours de M. Resal à l'École Polytechnique.

ce que nous avons dit, α est environ $\frac{4}{7000}$. Si l'on borne à leurs premiers termes les développements suivant les puissances croissantes de ε , il vient

$$\varepsilon_1 = \alpha \sin \theta_0, \quad n = \frac{d\varepsilon}{dt} = \pm \beta \sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}.$$

Cette formule s'intègre facilement si l'on remarque que, θ variant peu, β peut être regardé comme constant. En déterminant la constante d'intégration de façon que ε soit nul à l'origine, on obtient

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} \cos \beta t = \varepsilon_1 \sin^2 \frac{\beta t}{2}.$$

D'après cela, θ oscille d'un mouvement pendulaire entre θ_0 et $\theta_0 + \varepsilon_1$. Sa valeur moyenne est $\theta_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Voyons ce que devient la rotation r autour de Oz . Avec la même approximation, la formule (2) donne

$$r = - \frac{B \omega_0}{\Lambda \cos \theta_0} \varepsilon = \gamma \varepsilon,$$

où l'on a posé

$$\gamma = - \frac{B \omega_0}{\Lambda \cos \theta_0}.$$

En remplaçant r par $\frac{d\psi}{dt}$ et intégrant, on trouve

$$\psi = \gamma \int \varepsilon dt = \gamma \left(\frac{\varepsilon_1 t}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2\beta} \sin \beta t \right).$$

Ce mouvement angulaire se compose d'un terme uniforme et d'un terme périodique. La vitesse du mouvement uniforme est

$$\frac{\gamma \varepsilon_1}{2} = - \frac{B \omega_0}{\Lambda \cos \theta_0} \frac{P \alpha \Lambda \sin \theta_0}{B^2 \omega_0^2} = - \frac{P \alpha}{B \omega_0} \tan \theta_0.$$

Dans les conditions normales dont j'ai parlé, $\frac{P \alpha}{B \omega_0}$ a environ pour valeur 0,1. Quand le pied équilibriste est placé presque vertical, le second facteur $\tan \theta_0$ aussi est petit, de sorte que la vitesse de rotation $\frac{\gamma \varepsilon_1}{2}$ est faible. Si, par exemple, θ_0 est de 1° , cette rotation $\frac{\gamma \varepsilon_1}{2}$ sera de $0^\circ,1$ par seconde. Elle sera inappréciable. Elle devient sensible pour des valeurs plus petites de ω_0 et des valeurs

plus grandes de θ_0 . Quant au terme périodique de $\frac{\psi}{4}$, il a même période que ε . La phase est seulement changée de $\frac{1}{4}$.

L'amplitude est sensiblement la même, parce que γ est presque égal à β .

6. *Conclusions.* — En résumé, le mouvement apparent est une rotation autour de la verticale. Cette rotation, insensible quand le pied est presque vertical, est accompagnée de deux vibrations, l'une autour de la verticale, l'autre autour de DE. Ce sont ces vibrations qui, par le jeu des forces centrifuges composées, maintiennent l'équilibre apparent.

On peut le vérifier expérimentalement en plaçant DE dans la rainure d'un parquet. La variation de l'angle $\frac{\psi}{4}$ étant alors rendue impossible, le système bascule autour de DE.

Sur les groupes de Galois; par M. JOSEPH PEROTT.

Je n'ai nullement l'intention de donner une théorie complète de ces groupes qui ont fait l'objet de nombreux travaux : je me propose seulement de montrer comment il est possible d'engendrer chacun des trois groupes de Galois au moyen de trois opérations appartenant à l'exposant deux ou *réciroques*, comme les appelle Listing. Pour cela, j'aurai besoin de deux lemmes que je vais établir tout d'abord.

LEMME 1. — *Deux opérations réciroques commutatives non identiques, faisant partie d'un groupe associatif quelconque, engendrent un sous-groupe d'ordre quatre.*

En effet, soient a et b les deux opérations en question : toute opération exécutée à l'aide de a et b revient, en vertu de leur commutativité, à une puissance de a combinée avec une puissance de b . Or, en réduisant les exposants de ces puissances à leur moindre valeur positive (mod 2), on n'obtient que quatre expressions distinctes :

$$a^1 b^1, \quad a^1 b^2, \quad a^2 b^1, \quad a^2 b^2.$$

Comme ces quatre expressions donnent des résultats différents, — autrement les opérations a et b seraient identiques —, le lemme est démontré.

Ajoutons que, dans ce cas, ab appartient à l'exposant deux. Inversement, si a et b sont deux opérations réciproques faisant partie d'un groupe associatif et que ab appartienne à l'exposant deux, les opérations a et b sont commutatives. En effet, l'opération ba , qui est l'inverse de ab , est alors égale à ab .

LEMME II. — *Deux opérations réciproques non commutatives a et b , faisant partie d'un groupe associatif quelconque, engendrent un sous-groupe dont l'ordre est le double de l'exposant toujours supérieur à deux auquel ab appartient.*

En effet, soit t l'exposant auquel ab appartient; on aura

$$b = a(ab), \quad ba = (ab)^{t-1}.$$

Les opérations a et b étant réciproques, il est inutile de les employer autrement qu'alternativement et, par suite, toute opération exécutée au moyen d'un nombre pair d'opérations a et b reviendra à une puissance de ab , puisque ba , comme on vient de le voir, est une puissance de ab . Une opération exécutée au moyen d'un nombre impair d'opérations a et b revient, soit à

$$a(ba)^u = a(ab)^{tu-u},$$

soit à

$$b(ab)^v = a(ab)^{v+1}.$$

Cela étant ainsi, si l'on réduit les exposants de ab à leur moindre valeur positive (mod t), toute opération exécutée au moyen de a et de b reviendra soit à un terme de la suite

$$ab, (ab)^2, (ab)^3, \dots, (ab)^t,$$

soit à un terme de la suite

$$a(ab), a(ab)^2, a(ab)^3, \dots, a(ab)^t.$$

L'opération ab appartenant à l'exposant t , chaque suite n'aura que des termes différents entre eux. Disons plus : aucun terme de la seconde suite ne peut être égal à un terme de la première.

En effet, dans ce cas, on aurait

$$a(ab)^u = (ab)^v,$$

et, par suite, soit

$$a = (ab)^{v-u},$$

soit

$$a = (ab)^{v-u+t}$$

suivant que v est plus grand ou plus petit que u .

De sorte que tant a que b se réduiraient à des puissances de ab , ce qui entraînerait la commutativité

$$ab = ba,$$

contrairement à la supposition que les opérations a et b ne sont pas commutatives. L'ordre du sous-groupe engendré par a et b est donc bien $2t$.

I. — LE GROUPE DE GALOIS A 60 ÉLÉMENTS.

Pour ce groupe, le plus simple des trois, nous allons nous servir de considérations géométriques.

On sait que c'est Hamilton ⁽¹⁾ qui a eu le premier l'idée d'appliquer l'icosaèdre (ou le dodécaèdre) à l'étude du groupe qui nous occupe en ce moment.

Cela étant ainsi, chaque côté de direction donnée de la *fig.* 97 dans Lucas représente un élément du groupe de Galois à 60 éléments, et il y a lieu de considérer les opérations suivantes ⁽²⁾ (nous supprimons celles qui sont inutiles) :

1^o L'opération ι qui *renverse* (ou retourne bout pour bout) une ligne de la figure.

2^o L'opération λ qui change une ligne considérée comme un côté d'un pentagone en le côté suivant, en marchant toujours à *main droite*.

3^o L'opération ω qui change une *arête* du dodécaèdre pentagonal en l'*arête opposée* de ce solide.

Hamilton montre que les opérations λ et ι , de périodes 5 et 2 respectivement, suffisent à elles seules pour engendrer le groupe.

J'introduis encore une opération γ qui consiste à changer une *arête* du dodécaèdre en l'*arête opposée*, à changer de direction et à faire un pas à droite comme pour l'opération λ , le tout considéré comme une seule et unique opération. L'opération γ sera réci-

⁽¹⁾ *Memorandum respecting a new System of Roots of Unity* (*Philosophical Magazine*, p. 416; 1856), trad. dans Lucas, *Récréations mathématiques*, vol. II, p. 326, où l'on trouvera aussi, à la page suivante, la traduction d'un autre extrait d'Hamilton sur le même sujet.

⁽²⁾ Lucas, *Ouvrage cité*, page 237.

propre et, comme on aura

$$\lambda = \omega^2 \gamma,$$

il est clair que les trois opérations réciproques γ , γ et ω suffiront pour engendrer le groupe de Galois à elles seules.

II. — LE GROUPE DE GALOIS A 168 ÉLÉMENTS.

Ce groupe peut être défini à l'aide des permutations des quantités

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$$

qu'on obtient en leur faisant subir toutes les transformations qui changent ω en

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{7},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres entiers pris suivant le module 7 et satisfaisant à la congruence

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{7}.$$

Cela étant ainsi, je considère trois opérations réciproques du groupe

$$\varphi \equiv \frac{\omega + 4}{3\omega + 6}, \quad \gamma \equiv \frac{4\omega + 1}{4\omega + 3}, \quad \psi \equiv \frac{6}{\omega} \pmod{7}.$$

Soit n l'ordre du sous-groupe engendré par les opérations φ , γ et ψ . On aura

$$\gamma\psi \equiv \frac{3\omega + 4}{4\omega + 1} \pmod{7},$$

expression qui appartient à l'exposant 4 et, par conséquent, les opérations γ et ψ , à elles seules, engendreront un sous-groupe d'ordre 8 en vertu du lemme II.

Comme de plus

$$\varphi\gamma \equiv \frac{1}{6\omega + 6} \pmod{7}$$

appartient à l'exposant trois et

$$\varphi\gamma\psi \equiv \omega + 1 \pmod{7}$$

appartient à l'exposant sept, il faut bien que le nombre n soit un multiple de 8, de 3 et de 7. Or, comme ce même nombre n doit être un diviseur de 168, on aura $n = 168$, ce qui veut dire que les

opérations φ , χ et ψ engendreront à elles seules le groupe de Galois à 168 éléments.

III. — LE GROUPE DE GALOIS A 660 ÉLÉMENTS.

Ce groupe se définit d'une manière analogue, sauf que le nombre 11 prend la place du nombre 7. Il y a lieu, par conséquent, de considérer toutes les transformations qui changent ω en

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{11},$$

où α , β , γ , δ sont des nombres entiers pris suivant le module 11 et satisfaisant à la congruence

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{11}.$$

Cela étant ainsi, je considère les opérations réciproques

$$\varphi \equiv \frac{9\omega + 7}{4\omega + 2} \pmod{11},$$

$$\chi \equiv \frac{5\omega + 8}{5\omega + 6} \pmod{11},$$

$$\psi \equiv \frac{4}{8\omega} \pmod{11}.$$

On s'assure immédiatement que

$$\varphi\chi \equiv \frac{7}{3\omega + 3} \pmod{11}$$

appartient à l'exposant cinq; que

$$\varphi\psi \equiv \frac{5\omega + 8}{6\omega + 1}$$

appartient à l'exposant six; et enfin que

$$\varphi\chi\psi \equiv \omega + 1 \pmod{11}$$

appartient à l'exposant onze.

L'ordre du sous-groupe engendré par φ , χ et ψ , devant être en même temps un multiple de cinq, douze et onze et un diviseur de 660, sera égal au nombre 660 lui-même, ce qui prouve la proposition que nous avons en vue.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Touche : *Transformation des équations générales du mouvement des fluides.*

M. Tchebicheff : *Représentation approchée de $(a - x)^{-1}$ par des fonctions entières.*

M. Raffy : *Sur certaines équations différentielles du premier ordre qui s'intègrent par différentiation.*

M. D'OCAGNE, en présentant la nouvelle édition, revue et corrigée, de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, informe ses collègues que la Société mathématique d'Amsterdam vient de commencer la publication d'un nouveau recueil qui, sous le titre de *Revue semestrielle des publications mathématiques*, donne l'inventaire de tous les travaux mathématiques publiés dans le semestre écoulé, avec la classification admise pour le *Répertoire*, et, après le titre de chaque Mémoire, un résumé succinct rédigé en français, sauf pour les recueils anglais et allemands, qui sont analysés dans leur langue.

SÉANCE DU 13 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Laisant : *Expression des coefficients du binôme par des déterminants.*

M. Raffy : *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale s'obtient en remplaçant la dérivée par une constante.*

M. Humbert : *Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux intégrales elliptiques.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques.

Les théories de l'électricité et du magnétisme reposent sur quatre formules élémentaires qui sont :

La formule de Coulomb, pour l'action mutuelle de deux masses électriques ε et ε' ,

$$\varphi = h \frac{\varepsilon \varepsilon'}{r^2};$$

La formule de Coulomb, pour l'action mutuelle de deux masses magnétiques μ et μ' ,

$$\varphi = k \frac{\mu \mu'}{r^2};$$

La formule d'Ampère, pour l'action mutuelle de deux éléments de courant $i ds$ et $i' ds'$,

$$\varphi = \alpha \frac{i i' ds ds'}{r^2} \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right);$$

La formule de Laplace, pour l'action mutuelle d'une masse magnétique μ et d'un élément de courant $i ds$,

$$\varphi = \lambda \frac{\mu i ds \sin \theta}{r^2}.$$

Les constantes h , k , α et λ sont des paramètres d'homogénéité. Désignons par L , M , T les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, par $F = LMT^{-2}$ l'unité symbolique de force, et par μ et ε les unités de masse magnétique et de masse électrique considérées comme deux nouvelles unités fondamentales. Nous aurons, en remarquant que, d'après la définition même de l'intensité d'un courant, cette intensité doit admettre l'unité dérivée εT^{-1} ,

$$(1) \quad \begin{cases} h = FL^2\mu^{-2}, & k = FL^2\varepsilon^{-2}, \\ \alpha = FT^2\varepsilon^{-2}, & \lambda = FLT\varepsilon^{-1}\mu^{-1}. \end{cases}$$

En éliminant F entre ces quatre formules d'homogénéité, on trouve

$$(2) \quad \mu^2 \varepsilon^{-2} = h k^{-1} = \alpha k^{-1} L^2 T^{-2} = \lambda^2 k^{-2} L^2 T^{-2}.$$

Les deux dernières égalités, envisagées séparément, donnent

$$(3) \quad h = \alpha L^2 T^{-2} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \alpha k.$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 17 avril dernier, M. Mercadier a obtenu ces deux formules en supposant, comme on le fait généralement, que les masses magnétique et électrique μ et ν admettent toutes deux l'unité symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; on voit, par ce qui précède, que ces deux formules existent indépendamment de toute hypothèse sur la nature de μ et de ν . C'est en regardant h et k , coefficients concrets des formules de Coulomb, comme des coefficients purement numériques, que les électriciens ont été conduits à attribuer à μ et à ν l'unité symbolique $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$; si l'on raisonnait de même sur la formule de l'attraction newtonienne des masses matérielles, on serait conduit à attribuer à la masse matérielle l'unité symbolique L^3T^{-2} , résultat évidemment inadmissible. En réalité rien n'autorise, dans l'état actuel de la science électrique et magnétique, à attribuer à μ et à ν des unités symboliques fonctions de L , M , T . L'expérience conduit seulement, en électromagnétisme, à regarder comme homogènes entre elles la puissance magnétique d'un feuillet qui, par définition, admet l'unité dérivée $L^{-1}\mu$ et l'intensité d'un courant dont l'unité dérivée est $T^{-1}\varepsilon$. On peut, par conséquent, établir entre la masse magnétique μ et la masse électrique ε la corrélation

$$(4) \quad L^{-1}\mu = T^{-1}\varepsilon,$$

qui assimile la masse magnétique au produit d'une masse électrique par une vitesse, soit, pour ainsi dire, à une quantité de mouvement électrique. Les formules (2) se réduisent alors à

$$(5) \quad hL^{-2}T^2 = k = \alpha = \lambda.$$

Une grandeur électrique ou magnétique quelconque admet alors une unité symbolique exprimable soit au moyen de μ , soit au moyen de ε , conjointement avec L , M , T ; de là les deux notations

$$L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}(L^{-1}\mu)^{\delta} \quad \text{et} \quad L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}(T^{-1}\varepsilon)^{\delta},$$

dont le rapport

$$(6) \quad \left(\frac{L^{-1}\mu}{T^{-1}\varepsilon} \right)^{\delta}$$

est purement numérique. Si l'on remplaçait μ par $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$, on obtiendrait la notation dite *électromagnétique*; de même si l'on

remplaçait ε par $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$, on obtiendrait la notation dite *électrostatique*; dans ces conditions le rapport (6) cesserait d'être abstrait et deviendrait une puissance de vitesse $(LT^{-1})^{-2}$. Tel est le motif pour lequel le rapport des unités symboliques électromagnétique et électrostatique d'une même grandeur est toujours une puissance de la vitesse LT^{-1} .

Ces considérations montrent qu'il faut actuellement, pour établir rationnellement les théories électriques et magnétiques, adjoindre aux unités fondamentales L, M, T de la Mécanique une quatrième unité fondamentale, soit, par exemple et de préférence, l'unité I d'intensité de courant ou de puissance magnétique. Si l'on remarque d'ailleurs que, dans les théories dont il s'agit, la masse matérielle M n'est jamais mise directement en cause, tandis qu'il en est tout autrement de l'*énergie*, dont l'unité symbolique est L^2MT^{-2} , on pressent qu'il serait avantageux de substituer l'unité d'énergie Θ à l'unité de masse. Toutes les grandeurs magnétiques et électriques ont des unités symboliques faciles à exprimer au moyen de L, T, I, Θ considérées comme unités fondamentales. Ce système rationnel conduit aux notations suivantes :

Masse magnétique ou quantité de magnétisme.....	LI
Masse électrique ou quantité d'électricité	TI
Force magnétique, intensité de champ magnétique....	$L^{-2}I^{-1}\Theta$
Force électrique, intensité de champ électrique	$L^{-1}T^{-1}I^{-1}\Theta$
Potentiel magnétique, force magnétomotrice	$L^{-1}I^{-1}\Theta$
Potentiel électrique, force électromotrice.....	$T^{-1}I^{-1}\Theta$
Flux de force ou d'induction magnétique..... ..	$I^{-1}\Theta$
Flux de force électrique	$LT^{-1}I^{-1}\Theta$
Moment magnétique	L^2I
Intensité d'aimantation	$L^{-1}I$
Capacité électrique	$T^2I^2\Theta^{-1}$
Puissance magnétique, intensité de courant	I
Coefficients d'induction mutuelle et de self-induction .	$I^{-2}\Theta$
Réductance ou résistance magnétique	L^{-1}
Résistance électrique.....	$T^{-1}I^{-2}\Theta$

SÉANCE DU 7 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Fouret : *Sur le rôle du complexe linéaire en Statique et en Cinématique.*

M. d'Ocagne : *Étude de la convergence et de la sommation d'une classe particulière de séries.*

M. A. Chailan : *Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.*

SÉANCE DU 21 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. Sélivanoff : *Sur l'équation du cinquième degré.*

M. Painlevé : *Sur le problème de Dirichlet.*

M. Kobb : *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables.*

M. d'Ocagne : *Sur une déformation de la sphère.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur une classe nouvelle de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales.

Ossian Bonnet, dans l'*Addition* jointe à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier), s'est proposé de trouver toutes les surfaces déformables sans altération des courbures principales. L'ensemble des surfaces qui admettent une infinité de déformations pareilles se compose ; 1^o de certains cônes ; 2^o de toutes les surfaces à courbure moyenne constante ; 3^o d'une classe étendue de surfaces dont l'élément linéaire dépend de deux fonctions arbitraires ; 4^o de certaines surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

Voici comment sont définies les surfaces de la troisième classe. Désignant par X et Y deux fonctions arbitraires, l'une de x , l'autre de y , après avoir posé $u + iv = x$, $u - iv = y$; et représentant par ω le double de l'angle que fait l'une des lignes de courbure avec la courbe $u = \text{const.}$, l'illustre géomètre trouve

$$ds^2 = -(x+y)^2 \frac{X'Y' dx dy}{(X+Y)^2}, \quad e^{i\omega} = \frac{(Y-m)\sqrt{X'}}{(X+m)\sqrt{Y'}};$$

puis, ayant fait ressortir la généralité de ces surfaces, il passe à celles de la quatrième classe.

A raison du petit nombre des surfaces isothermiques connues jusqu'à ce jour, il y a lieu de signaler comme telles les surfaces d'Ossian Bonnet. Pour nous assurer du fait, rappelons que les deux systèmes de lignes de courbure ont respectivement pour équations différentielles

$$\frac{du}{dv} = \tan^2 \frac{\omega}{2}, \quad \frac{du}{dv} = -\cot^2 \frac{\omega}{2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$dx + e^{-i\omega} dy = 0, \quad dx - e^{-i\omega} dy = 0.$$

L'exponentielle étant remplacée par son expression, il vient

$$\frac{\sqrt{X'}}{X+m} dx + \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy = 0, \quad \frac{\sqrt{X'}}{X+m} - \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy = 0.$$

Si l'on désigne par α et β les paramètres des lignes de courbure et qu'on fasse

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{X'}}{X+m} dx + \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy &= d\alpha, \\ \frac{\sqrt{X'}}{X+m} dx - \frac{\sqrt{Y'}}{Y-m} dy &= d\beta, \end{aligned}$$

on trouvera immédiatement

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = \frac{4\sqrt{X'Y'}}{(X+m)(Y-m)} dx dy.$$

Ainsi, quelle que soit la constante m , le produit $dx dy$ est proportionnel à $d\alpha^2 - d\beta^2$, ce qui montre que les surfaces considérées ont leurs lignes de courbure isothermes et conservent cette propriété dans toutes les déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.

Relativement aux surfaces 4^o qui complètent la solution de son problème, Ossian Bonnet les signale bien comme étant applicables sur des surfaces de révolution et dit implicitement (*loc. cit.*, p. 85) que leurs courbures principales sont fonctions l'une de l'autre, mais il n'insiste pas sur ces deux propriétés remarquables et ne se préoccupe pas de savoir s'il a trouvé toutes les surfaces douées de l'une et de l'autre. D'une Note que j'ai publiée sur ce sujet dans ce Recueil (t. XIX, p. 158) il résulte que, si l'on fait abstraction des hélicoïdes et des surfaces à courbure totale constante, *toutes les surfaces applicables sur une surface de révolution et dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre admettent une infinité de déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.*

Au cours de recherches encore inédites sur les surfaces isothermiques dont les courbures principales sont liées par une relation, M. Caronnet a trouvé des surfaces applicables sur des surfaces de révolution et il a démontré que *toute surface applicable sur une surface de révolution et dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre est une surface isothermique.*

Il suit de là et de l'énoncé précédent que les surfaces de la quatrième classe d'Ossian Bonnet sont toutes isothermiques. Nous venons de voir qu'il en est ainsi des surfaces de la troisième classe, et l'on sait que tel est aussi le cas des cônes et des surfaces à courbure moyenne constante. On peut donc énoncer ce théorème, vrai sans aucune restriction : *Toute surface, qui admet une série de déformations n'altérant pas ses courbures principales, est une surface isothermique et conserve cette propriété dans toutes ces déformations.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Transformation des équations générales du mouvement des fluides; par M. TOUCHE.

Si nous considérons un élément ds de trajectoire fluide et si nous le projetons sur trois axes rectangulaires, nous obtenons les

trois équations bien connues du mouvement des fluides

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Appelons v_1 la vitesse suivant la trajectoire et a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire. Dans les équations (1) remplaçons u, v, w et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par a , ceux de la deuxième par a' , ceux de la troisième par a'' et ajoutons membre à membre.

L'équation que l'on obtient ainsi a pour premier membre

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dp}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dp}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}.$$

Au second membre figure la résultante U des forces extérieures suivant la trajectoire.

Les termes qui contiennent les dérivées prises par rapport au temps se réduisent à $-\frac{dv_1}{dt}$.

Il reste encore au second membre dix-huit termes dont neuf, qui contiennent les dérivées des cosinus directeurs, ont une somme nulle; l'ensemble des neuf autres se réduit à $-v_1 \frac{dv_1}{ds}$. On arrive ainsi à l'équation

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U - \frac{dv_1}{dt} - v_1 \frac{dv_1}{ds}.$$

Pour obtenir la deuxième équation, nous considérons comme précédemment, à un instant donné, un élément ds de trajectoire fluide et nous projetons toujours cet élément sur les trois axes rectangulaires, mais nous considérons, en ce même instant, un élément de la normale principale à la trajectoire, de longueur ds' égale à ds , et nous projetons ds' sur les trois axes. Nous considérons ainsi deux petits parallélépipèdes rectangles différents, ayant un sommet commun A , les deux diagonales ds et ds' égales, le premier de ces parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz et le second dx', dy', dz' .

Nous considérons d'abord le premier qui nous donne les équations connues du mouvement des fluides. Désignant ensuite par b , b' , b'' les cosinus directeurs de la normale principale à la trajectoire, remplaçons dans les équations du mouvement u , v , w et leurs dérivées par rapport à x , y , z , t , par leurs valeurs en fonction de v_1 , a , a' , a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par b , ceux de la deuxième par b' , ceux de la troisième par b'' et ajoutons membre à membre.

L'équation ainsi obtenue a pour premier membre

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dp}{dy} \frac{dy'}{ds} + \frac{dp}{dz} \frac{dz'}{ds'} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds'}.$$

Au second membre figure la résultante U' des forces extérieures suivant la normale principale à la trajectoire.

Les termes en $\frac{dv_1}{dt}$ ont une somme nulle. Pour calculer les termes en v_1 , considérons l'élément de trajectoire $d\sigma$ qui passe au bout du temps dt par le point A, ainsi que l'élément de trajectoire ds qui passe par le même point A au commencement du temps dt . Projetons $d\sigma$ sur le plan osculateur de la trajectoire considérée au commencement du temps dt , appelons dx_1 l'angle de cette projection avec l'élément ds et dx_2 l'angle de l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan osculateur. Désignons enfin par c , c' , c'' les cosinus directeurs de la binormale à la trajectoire. La considération de triangles sphériques nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} -bv_1 \frac{da}{dt} = b^2 v_1 \frac{dx_1}{dt} + bc v_1 \frac{dx_2}{dt}, \\ -b'v_1 \frac{da'}{dt} = b'^2 v_1 \frac{dx_1}{dt} + b'c' v_1 \frac{dx_2}{dt}, \\ -b''v_1 \frac{da''}{dt} = b''^2 v_1 \frac{dx_1}{dt} + b''c'' v_1 \frac{dx_2}{dt}, \end{array} \right.$$

ce qui réduit l'ensemble des termes en v_1 à $v_1 \frac{dx_1}{dt}$.

Il reste encore au second membre dix-huit termes dont neuf contiennent v_1^2 en facteur. Pour les calculer, portons à partir du point A une longueur ds sur la trajectoire; la tangente à la trajectoire qui part de l'extrémité de cet arc fait avec la tangente à la trajectoire en A un angle infiniment petit dx_1 et la Trigonométrie

sphérique donne

$$- b v_1^2 \frac{du}{ds} = b^2 v_1^2 \frac{dz}{ds},$$

$$- b' v_1^2 \frac{du'}{ds} = b'^2 v_1^2 \frac{dz}{ds},$$

$$- b'' v_1^2 \frac{du''}{ds} = b''^2 v_1^2 \frac{dz}{ds},$$

en sorte que les termes en v_1^2 ont pour somme $v_1^2 \frac{dz}{ds}$. Les neuf termes qui restent ont une somme nulle; il vient ainsi

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds'} = U' + v_1 \frac{dz_1}{dt} + v_1^2 \frac{dz}{ds}.$$

Pour obtenir la troisième équation, nous considérons comme précédemment, à un instant donné, un élément ds de trajectoire fluide et nous projetons toujours cet élément sur les trois axes; mais nous considérons en ce même instant un élément de la binormale à la trajectoire, de longueur ds'' égale à ds et nous projetons ds'' sur les mêmes axes rectangulaires. Nous considérons ainsi deux petits parallélépipèdes rectangles différents, ayant un sommet commun A, les deux diagonales ds et ds'' égales, le premier de ces parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz et le second dx'', dy'', dz'' .

Le premier parallélépipède donne les équations du mouvement des fluides. Remplaçons encore u, v, w et leurs dérivées en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par c , ceux de la deuxième par c' , ceux de la troisième par c'' et ajoutons membre à membre.

La considération du second parallélépipède montre que le premier membre de l'équation ainsi obtenue équivaut à $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''}$. Au second membre figure la résultante U'' des forces extérieures suivant la binormale à la trajectoire. Les termes qui contiennent les dérivées prises par rapport au temps se réduisent à $v_1 \frac{dz_2}{dt}$.

Les dix-huit autres termes ont une somme nulle; d'où résulte l'équation

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds'} = U'' + v_1 \frac{dz_2}{dt},$$

qui complète la transformation que nous avons en vue.

Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables ; par M. G. КОББ.

Dans mon *Mémoire Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* ⁽¹⁾ j'ai démontré que le domaine d'un point quelconque (a, b, c) d'une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

peut être représenté par un certain nombre de développements de la forme

$$x - a = P_1(u, v), \quad y - b = P_2(u, v), \quad z - c = P_3(u, v).$$

Les variables auxiliaires u et v peuvent être choisies d'une infinité de manières, mais on a le théorème suivant : *Soient*

$$\begin{aligned} x - a &= P_1(u, v), & y - b &= P_2(u, v), & z - c &= P_3(u, v), \\ x - a &= P'_1(u', v'), & y - b &= P'_2(u', v'), & z - c &= P'_3(u', v') \end{aligned}$$

deux représentations de la même partie du domaine du point (a, b, c) telles qu'à un système de valeurs de x, y, z ne corresponde qu'un seul système de valeurs des variables auxiliaires; les deux séries

$$P_i(u, v), \quad P'_i(u', v') \quad (i = 1, 2, 3)$$

commencent toujours par des termes du même ordre.

Pour abréger l'écriture, supposons que le point en question soit l'origine : on aura

$$(1) \quad \begin{cases} x = P_1(u, v) = (u, v)_{\lambda_1} + (u, v)_{\lambda_1+1} + \dots, \\ y = P_2(u, v) = (u, v)_{\lambda_2} + (u, v)_{\lambda_2+1} + \dots, \\ z = P_3(u, v) = (u, v)_{\lambda_3} + (u, v)_{\lambda_3+1} + \dots \end{cases}$$

et aussi

$$(2) \quad \begin{cases} x = P'_1(u', v') = (u', v')_{\lambda'_1} + (u', v')_{\lambda'_1+1} + \dots, \\ y = P'_2(u', v') = (u', v')_{\lambda'_2} + (u', v')_{\lambda'_2+1} + \dots, \\ z = P'_3(u', v') = (u', v')_{\lambda'_3} + (u', v')_{\lambda'_3+1} + \dots \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. IX.

Nous allons démontrer qu'on a

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2, \quad \lambda'_3 = \lambda_3.$$

Considérons les deux équations

$$x = P_1(u, v), \quad y = P_2(u, v)$$

et faisons la substitution

$$(3) \quad u = (\alpha_1 + \beta_1 v_1) u_1, \quad v = (\alpha_2 + \beta_2 v_1) u_1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x &= u_1^{\lambda_1} \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1} + \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_2} \right] v_1 + \dots \right\}, \\ y &= u_1^{\lambda_2} \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2} + \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_2} \right] v_1 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$(4) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1} = c_1, & (\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2} = c_2; \\ \frac{1}{\lambda_1 c_1} \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{\partial \alpha_2} \right] = c'_1, \\ \frac{1}{\lambda_2 c_2} \left[\beta_1 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}{\partial \alpha_2} \right] = c'_2. \end{cases}$$

On trouve en extrayant les racines

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{c_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = u_1 (1 + c'_1 v_1 + \dots), \\ \left(\frac{y}{c_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = u_1 (1 + c'_2 v_1 + \dots). \end{cases}$$

Si les deux polynômes homogènes $(u, v)_{\lambda_1}$ et $(u, v)_{\lambda_2}$ ne sont pas identiquement égaux, on peut toujours supposer

$$c'_1 > c'_2.$$

Des formules (5) on déduit facilement

$$\left(\frac{x}{c_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2} \right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] = (c'_1 - c'_2) v_1 + C u_1 + \dots$$

Ensuite le système

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} &= u_1 + (u_1, v_1)_2 + \dots, \\ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] &= C u_1 + (c'_1 - c'_2) v_1 + (u_1, v_1)_2 + \dots \end{aligned}$$

nous donne

$$\begin{aligned} u_1 &= P_1 \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] \right\}, \\ v_1 &= P_2 \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

et, enfin, par (3) et (1),

$$(6) \quad z = P \left\{ \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \left[\left(\frac{y}{c_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda_2}} - 1 \right] \right\}.$$

Il est impossible que les indices de racines λ_1 et λ_2 se réduisent, parce que la formule doit nous donner exactement λ_1, λ_2 valeurs de z , d'après l'hypothèse faite sur la représentation du domaine du point en question.

Traitions maintenant de la même manière les équations (2) et posons

$$(7) \quad u' = (\alpha'_1 + \beta'_1 v'_1) u'_1, \quad v' = (\alpha'_2 + \beta'_2 v'_1) u'_1.$$

Si les deux polynômes homogènes $(u', v')_{\lambda'_1}$ et $(u', v')_{\lambda'_2}$ ne sont pas identiquement égaux, nous pouvons toujours déduire un développement

$$(8) \quad z = P' \left\{ \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\lambda'_1}}, \left(\frac{x}{c'_1}\right)^{\frac{1}{\lambda'_1}} \left[\left(\frac{y}{c'_2}\right)^{-\frac{1}{\lambda'_2}} - 1 \right] \right\}$$

où, en outre, on a

$$(9) \quad \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

ou bien

$$\frac{(\alpha'_1, \alpha'_2)_{\lambda'_1}}{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda'_2}} = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_1}}{(\alpha_1, \alpha_2)_{\lambda_2}}.$$

La relation (9) ayant lieu, il existe certainement dans les domaines de convergence des séries (6) et (8) une partie commune. Mais, pour cette partie du domaine, les deux séries doivent être identiques, d'où résulte, en donnant d'abord à y une valeur arbitraire y_0 ,

$$\lambda'_1 = \lambda_1,$$

car alors les deux séries (6) et (8) représentent la même branche de la courbe

$$f(x, y_0, z) = 0.$$

De la même manière, on prouvera l'égalité $\lambda'_2 = \lambda_2$.

Supposons maintenant que le cas d'exception

$$(u', v')_{\lambda'_1} \equiv (u', v')_{\lambda'_2}$$

se présente et soit, par conséquent,

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} x &= (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \dots, \\ y &= (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \dots \end{aligned}$$

Mais alors considérons le système

$$\begin{aligned} x &= (u', v')_{\lambda'} + (u', v')_{\lambda'+1} + \dots \\ x - y &= (u', v')_{\lambda'+k} + (u', v')_{\lambda'+k+1} + \dots \quad (k \geq 1), \end{aligned}$$

d'où nous déduisons par (2)

$$(10) \quad z = P' \left\{ \left(\frac{x}{c_1'} \right)^{\frac{1}{\mu_1}}, \left(\frac{x}{c_1'} \right)^{\frac{1}{\mu_1}} \left[\left(\frac{x-y}{c_2'} \right)^{-\frac{1}{\mu_k}} - 1 \right] \right\},$$

avec

$$m_1 \mu_1 = \lambda', \quad m_k \mu_k = \lambda' + k,$$

m_1 et m_k étant des nombres entiers. Ici, au contraire, une réduction des indices λ' et $\lambda' + k$ est nécessaire pour que la formule (10) ne nous donne pas trop de valeurs de z .

Nous allons voir que les deux séries (6) et (10) ne peuvent pas être identiques.

En effet, s'il en est ainsi, nous aurons d'abord

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_k;$$

mais, en même temps, en donnant à γ la valeur γ_0 , nous aurons

$$\lambda_1 = \mu_1 \mu_k,$$

et ensuite, en fixant la valeur de x ,

$$\lambda_2 = \mu_k,$$

d'où résulte

$$\lambda_2 = \mu_k = 1.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse faite sur la représentation par les séries (2),

$$\lambda'^2 = \mu_1 \mu_k = \lambda_1 \lambda_2,$$

ou bien

$$\mu_1 = \lambda'^2,$$

ce qui est impossible, sauf pour $\lambda' = 1$. Ainsi, les deux séries (6) et (10) ne peuvent pas être identiques. Par conséquent, si le cas d'exception se présente pour les séries (2), il doit se présenter aussi pour les séries (1). Mais alors, comme on a, à la fois,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda'_1 \lambda'_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda',$$

il en résulte bien

$$\lambda = \lambda'.$$

Ainsi nous avons démontré, dans tous les cas, les égalités

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \quad \lambda_2 = \lambda'_2.$$

Nous démontrerions exactement de la même manière l'égalité

$$\lambda_3 = \lambda'_3.$$

Le théorème énoncé est donc complètement établi.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 JUILLET 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Charliat, présenté par MM. Chailan et D. André; M. Painlevé, présenté par MM. d'Ocagne et Humbert; M. Michel, présenté par MM. d'Ocagne et Picquet; M. Adam, présenté par MM. Antomari et Caronnet.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur les équations représentables par trois systèmes réguliers de points isoplèthes.*

M. Caronnet : *Sur les hélicoïdes.*

M. Humbert : *Involutions sur les courbes algébriques.*

M. CHAILAN (¹) fait la Communication suivante :

Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un système à liaisons complètes admet une position d'équilibre instable, s'il y a une fonction des forces, le système ne peut se fixer dans cette position au bout d'un temps fini.*

Considérons la trajectoire d'un point quelconque du système; la position de ce point sur sa trajectoire est définie par l'arc parcouru s . Les coordonnées de tous les points du système sont des fonctions connues de s , puisque le système est à liaisons complètes; la fonction des forces peut se mettre sous la forme $U(s)$, et la demi-force vive du système peut s'écrire $\varphi(s) \frac{ds^2}{dt^2}$, $\varphi(s)$ étant une fonction essentiellement positive, car elle est une somme de carrés.

Prenons pour origine des arcs le point de la trajectoire qui correspond à la position d'équilibre, supposons qu'entre la position initiale et cette position d'équilibre il n'y ait pas d'autre position

(¹) Annexe au compte rendu de la séance du 7 juin.

d'équilibre instable, et lançons le système de façon que s décroisse.

Le théorème des forces vives donne

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = U(s) - U(o),$$

$$dt = - \frac{\sqrt{\varphi(s)} ds}{\sqrt{U(s) - U(o)}}.$$

Le temps que mettrait le mobile pour atteindre la position d'équilibre est donc

$$t = - \int_{s_0}^0 \frac{\sqrt{\varphi(s)} ds}{\sqrt{U(s) - U(o)}}.$$

Développons $U(s)$ par la formule de Maclaurin

$$U(s) = U(o) + \frac{s}{1} U'(o) + \frac{s^2}{2!} U''(o) + \dots$$

Par hypothèse, $U'(o)$ est nul; par suite, on a

$$U(s) - U(o) = s^{n+2} \psi(s) \quad (n \geq 0),$$

la fonction $\psi(s)$ étant essentiellement positive dans l'intervalle de 0 à s_0 . Donc

$$t = - \int_{s_0}^0 \sqrt{\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}} \frac{ds}{s^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Cette intégrale est infinie puisque

$$\int_{\varepsilon}^0 \frac{ds}{s^{\frac{n}{2}+1}}$$

croît sans limite, n étant supérieur ou égal à zéro.

Remarque I. — Le théorème ne serait pas applicable si, dans le voisinage de la position d'équilibre, la fonction U n'était pas développable par la formule de Maclaurin.

Par exemple, prenons un système pesant :

$$U = mgz, \quad \frac{dU}{ds} = mg \frac{dz}{ds}, \quad \frac{d^2 U}{ds^2} = mg \frac{d^2 z}{ds^2}, \quad \text{etc.};$$

si la courbe décrite par le point d'ordonnée z présente à l'origine un point de rebroussement, la tangente en ce point étant par hypothèse horizontale, la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2}$$

donne

$$\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_0 = \infty.$$

Dans ce cas, le temps est fini (1).

Remarque II. — Pour faire le développement, il est inutile de calculer U en fonction de s. En effet, si U est exprimé à l'aide d'un paramètre p, nous savons toujours calculer $\frac{dp}{ds}$, et la formule

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dp} \frac{dp}{ds}$$

permet d'obtenir toutes les dérivées de U par rapport à s.

M. DEMOULIN adresse la Note suivante :

Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution.

Soient S et S' deux surfaces polaires réciproques par rapport au paraboloïde de révolution

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

A un point quelconque M de S correspond sur S' un point M', pôle du plan tangent en M par rapport au paraboloïde. Les courbures totales $\frac{1}{R_1 R_2}$ et $\frac{1}{R'_1 R'_2}$ des surfaces S et S' aux points M et M' ont entre elles une relation très simple :

Par les points M et M' menons, parallèlement à l'axe du paraboloïde, deux droites rencontrant cette surface aux points A et A'. Cela posé, F étant le foyer commun à toutes les sections méridiennes, on a

$$R_1 R_2 R'_1 R'_2 = 16 \overline{FA}^2 \overline{FA'}^2.$$

Pour démontrer cette formule, appelons x, y, z, p, q, r, s, t les coordonnées du point M et les dérivées des deux premiers ordres de z par rapport à x et à y ; soient $x', y', z', p', q', r', s', t'$ les éléments analogues relatifs au point M'. Entre ces quantités exis-

(1) DESPEYROUS, *Mécanique*, t. I, p. 286. — APPELL, *Cours de Mécanique*, t. I, p. 216.

tent les relations suivantes, bien connues en Analyse ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = p, & y' = q, \\ x = p', & y = q', \\ (rt - s^2)(r't' - s'^2) = 1. \end{cases}$$

On a, d'autre part,

$$R_1 R_2 = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2},$$

$$R'_1 R'_2 = \frac{(1 + p'^2 + q'^2)^2}{r't' - s'^2};$$

multipliant ces égalités et tenant compte des relations (1), on trouve

$$(2) \quad R_1 R_2 R'_1 R'_2 = (1 + x^2 + y^2)^2 (1 + x'^2 + y'^2)^2.$$

Soient P la projection orthogonale du point A sur l'axe de révolution OZ et N le point d'intersection de cet axe avec la normale en A au parabolôïde. De la forme choisie pour l'équation du parabolôïde il résulte que PN = 1; on a donc

$$1 + x^2 + y^2 = \overline{AN}^2 = 2FA,$$

et de même

$$1 + x'^2 + y'^2 = 2FA'.$$

Ces deux relations, jointes à l'égalité (2), donnent la formule annoncée.

SÉANCE DU 19 JUILLET 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. F. Lucas : *Propriétés d'un système de points dans un plan.*

M. D. André : *Propriétés d'un système de points dans l'espace.*

M. Laisant : *Sur l'attraction proportionnelle à la distance et sur les forces constantes.*

M. Humbert : *Courbes tracées sur la surface des ondes.*

(1) Voir par exemple, CAMILLE JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, p. 357.

M. d'OCAGNE fait la Communication suivante :

Remarque sur la déformation des surfaces de révolution.

Soient S et S' deux surfaces de révolution dont C et C' sont les courbes méridiennes, d et d' les axes. A partir d'origines fixes A et A' , prises sur C et C' , portons des arcs égaux AM et $A'M'$ et menons à ces courbes, en M et en M' , leurs tangentes qui coupent d et d' respectivement en μ et en μ' . On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces S et S' soient applicables l'une sur l'autre est que, quelle que soit la longueur des arcs égaux AM et $A'M'$, les tangentes $M\mu$ et $M'\mu'$ soient égales.

On peut déduire de là un mode de génération très simple pour les méridiennes des surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée.

On a, en effet, le théorème suivant, qui ne semble pas encore avoir été remarqué :

Soient C une section faite dans un cylindre quelconque Γ par un plan P , d l'intersection du plan P par un plan p perpendiculaire aux génératrices de Γ et qui coupe lui-même ce cylindre suivant la courbe c . Lorsqu'on développe le cylindre Γ sur un plan, la courbe C se transforme en C' et la courbe c en une droite d' . Cela posé, on a cette proposition :

La surface de révolution S engendrée par la rotation de la courbe C autour de la droite d et la surface de révolution S' engendrée par la rotation de la courbe C' autour de la droite d' sont applicables l'une sur l'autre.

En effet, si M et m sont des points de C et de c se correspondant sur une même génératrice de Γ , les tangentes à ces courbes en ces points se coupent en μ sur la droite d . Pendant le développement, le point μ vient en μ' sur la droite d' . D'autre part, l'angle $mM\mu$ et le segment Mm restant invariables, le triangle $Mm\mu$ ne subit aucune déformation et, par suite, $M'\mu' = M\mu$; enfin, dans le développement, l'arc AM conserve sa longueur; donc $\text{arc} A'M' = \text{arc} AM$.

Par conséquent, les courbes C et C' liées respectivement aux droites d et d' offrent bien le caractère rappelé plus haut pour que les surfaces de révolution S et S' qu'elles engendrent en tournant autour de ces droites soient applicables l'une sur l'autre.

On voit comment, par application de ce théorème, on pourra engendrer les méridiennes de surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution S donnée.

Par la méridienne C de S , on fera passer un cylindre dont les génératrices, inclinées d'un angle quelconque sur le plan de C , soient à angle droit sur l'axe d de S , puis on développera ce cylindre sur un plan et la courbe C donnera ainsi naissance à C' ⁽¹⁾.

Si la courbe C coupe d en deux points A et B et si ces points, dans le développement, viennent en A' et en B' , l'axe d' est donné par la droite $A'B'$.

Si C ne coupe pas d , on choisit deux points quelconques A et B sur C ; les tangentes en ces points coupant d en α et en β , on porte sur les tangentes à C' , menées par les points correspondants A' et B' , les segments $A'\alpha' = A\alpha$ et $B'\beta' = B\beta$. L'axe d' est alors donné par la droite $\alpha'\beta'$.

Il faut encore remarquer que lorsqu'on fait varier le plan p de l'énoncé précédent, c'est-à-dire lorsque l'axe d se déplace par rapport à la courbe C en conservant une direction fixe, la courbe C' reste la même, mais que l'axe d' se déplace également par rapport à C' en conservant la même direction.

Si, en particulier, on suppose que la courbe C soit un cercle, on obtient cette proposition :

Si la courbe C' , en tournant autour de d' située dans son plan, engendre une surface applicable sur la sphère, cette courbe, en tournant autour de toute droite parallèle à d' et aussi située dans son plan, engendrera une surface applicable sur un tore.

(¹) On peut déduire de là un moyen de tracer pratiquement la méridienne C' connaissant la méridienne C . Supposons, en effet, qu'on ait découpé dans un plan rigide et mince un gabarit limité d'une part à la courbe C , de l'autre à l'axe d . Plaçant le bord d de ce gabarit sur une table plane T , donnons à ce gabarit une inclinaison quelconque sur la table T ; puis, après l'avoir fixé dans cette situation, appliquons contre son bord curviligne C une feuille de papier un peu fort, appuyée par son bord inférieur sur la table T . Nous n'aurons qu'à marquer sur la feuille de papier la trace du bord C , puis à étendre cette feuille sur un plan pour que cette trace donne la courbe C' qui, en tournant autour de la droite d' , représentée par le bord inférieur du papier, engendre une surface S' applicable sur S . On obtient différentes surfaces S' en faisant varier l'angle du gabarit avec la table T .

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs; par M. G. ARNOUX.

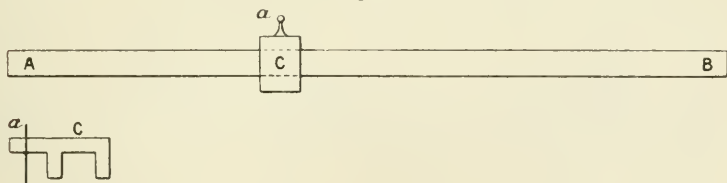
Le problème *pratique* de la décomposition d'un polynôme en facteurs, ou de la résolution des équations, a été étudié par d'illustres géomètres, tels que Newton et Lagrange, qui en ont proclamé l'importance.

Soit par des moyens symboliques, pour les premiers degrés ou dans des cas particuliers, soit par des moyens graphiques tels que les courbes d'erreurs, on peut parvenir à cette décomposition d'une façon plus ou moins pénible, suivant les cas.

Dans cette Communication, nous voulons aujourd'hui donner la description d'un petit appareil, très simple, qui permet d'obtenir avec une certaine approximation *toutes les solutions réelles* d'une équation à coefficients réels d'un degré quelconque.

Soit AB une règle métallique bien droite (pour laquelle il serait avantageux d'employer la forme en cornière afin d'éviter les déviations), règle sur laquelle un curseur muni d'une aiguille *a* glisse à frottement, cette aiguille étant elle-même mobile dans une petite douille (*fig. 1*).

Fig. 1.

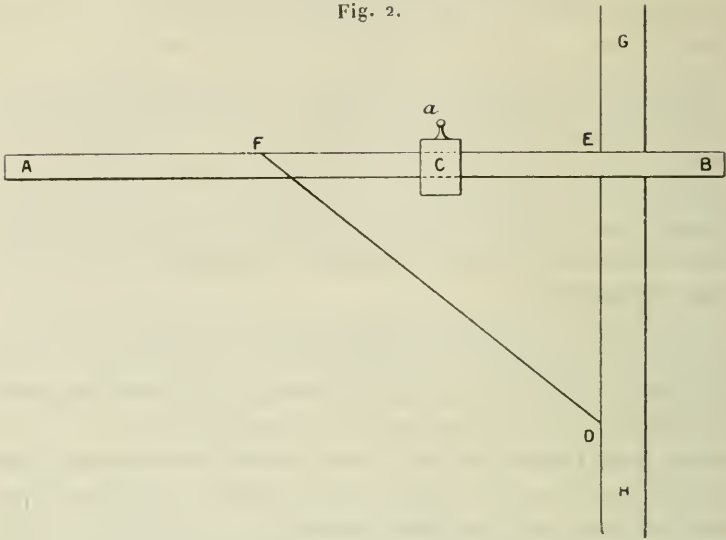


Collez cette règle sur une équerre DEF, de manière qu'elle dépasse au delà du point E d'une longueur suffisante pour couvrir une règle de même épaisseur que l'équerre (*fig. 2*).

Si l'on voulait obtenir une grande précision, et une rapidité et une commodité d'opération plus considérables, on pourrait fixer la règle sur une table où elle tournerait autour d'un pivot. La règle et l'équerre seraient graduées et munies d'un vernier dont

l'aiguille faciliterait au plus haut point l'emploi; mais, pour la

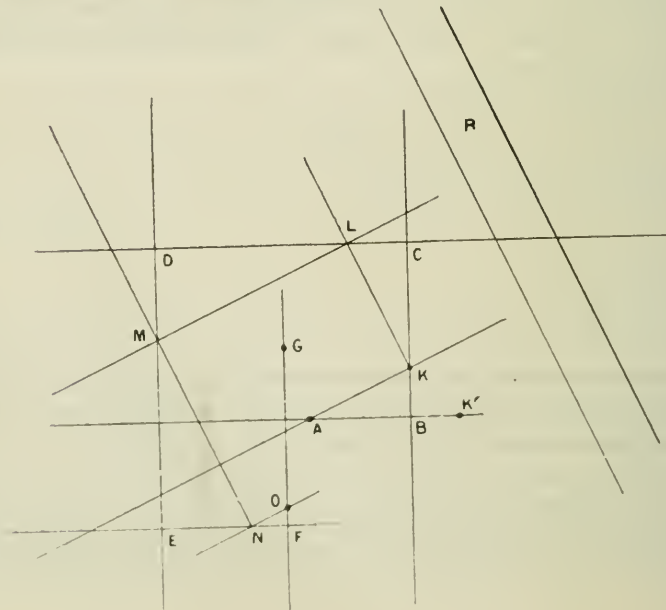
Fig. 2.



théorie, l'appareil que nous venons de décrire suffit.

Voici maintenant la manière de l'appliquer (*fig. 3*).

Fig. 3.



Soit ABCDEFG le représentant graphique ⁽¹⁾ d'un polynôme du cinquième degré, à coefficients réels, en faisant $x = \sqrt{-1}$. Il est parfaitement évident que l'on pourrait donner à x telle valeur que l'on voudrait $\sqrt[m]{+A}$, et que, théoriquement, le procédé serait identiquement le même; mais il en résulterait une complication pour les grandeurs de translation et de rotation, que la valeur $\sqrt{-1}$ évite.

Toutes les opérations sont ramenées à l'emploi de l'équerre, ce qui simplifie au plus haut point les opérations.

La solution de l'équation

$$A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x^1 + A_5 x^0 = 0$$

est ramenée à la décomposition du polynôme du premier membre en ses facteurs. Graphiquement, cela revient à inscrire sur le 6-latère rectangulaire ABCDEFG un 5-latère rectangulaire dont le 1^{er} latère passe par le point A et le dernier par le point G, car, suivant la théorie de la méthode graphique,

$$AKLMNO \times ABK = ABCDEFO,$$

AKLMNO étant un 5-latère correspondant à l'un des facteurs du quatrième degré et jouant le rôle de multiplicateur, et ABK un 2-latère correspondant à un facteur du premier degré, jouant le rôle de multiplicande.

Posons la règle en dehors du graphique dans une direction quelconque, faisons glisser l'équerre sur la règle et le curseur sur la règle métallique, de manière que l'aiguille se pose en A. Un glissement du curseur donne instantanément le point K, un glissement de l'équerre sur la règle (le curseur étant immobile) donne le point L. Un nouveau glissement du curseur (l'équerre étant immobile) donne le point M; et, en procédant de la même façon, on obtient N et O.

Il est évident que l'angle BAK est trop faible et qu'il faut faire tourner la règle d'une certaine quantité pour rapprocher d'abord et pour amener ensuite aussi exactement que possible le point O

(1) Pour la représentation graphique des polynômes et la notion des latères (1-latère, 2-latère, etc.), se reporter à mes *Essais sur l'Algèbre graphique*, Digne, 1890.

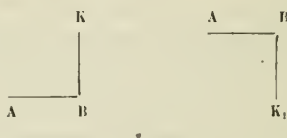
à coïncider avec le point G ; au moment où ce résultat est obtenu, ABK est un des facteurs du 1^{er} degré de $ABCDEF G$ et $-\frac{BK}{AB} = \frac{KB}{AB}$ est une des racines réelles de l'équation, multipliée par $\sqrt{-1}$.

Si l'on divise par $\sqrt{-1}$, en faisant tourner la direction de BK du quart de tour complet, ABK' est le facteur du premier degré du 6-latère que l'on obtiendrait en faisant $x = +1$; ou graphiquement, en faisant faire de gauche à droite à BC un quart de tour, à CD un demi, à DE trois quarts, à EF un tour, à FG un tour et quart, ce qui donnerait une ligne droite, tous les latères ayant ainsi une seule et même direction.

Nous avons choisi comme exemple un polynôme à coefficients tous positifs, ce qui donne une ligne polygonale convexe. Mais l'opération graphique serait absolument identique si certains de ces coefficients étaient négatifs. La seule précaution qu'il faudrait prendre serait de numérotter les latères du produit $(AB-1)$, $(BC-2)$, $(CD-3)$, $(DE-4)$, $(EF-5)$, $(FG-6)$ et de faire attention que A est sur le premier latère, K sur le second, L sur le troisième, et ainsi de suite ; de cette manière aucune erreur n'est possible.

Si le polynôme avait des coefficients positifs et négatifs, les deuxièmes latères des facteurs du premier degré auraient tantôt la

Fig. 4.



forme ABK , tantôt la forme ABK_1 , la première correspondant aux racines positives, la seconde aux racines négatives. L'étendue des tâtonnements en serait augmentée, de sorte qu'il vaut mieux, au moyen des procédés donnés dans tous les traités d'Algèbre élémentaire, ramener le polynôme à cette forme. Alors tous les 2-latères facteurs ont la forme ABK et le tâtonnement est terminé quand le point K a parcouru toute la longueur BC .

Pour obtenir tous les facteurs dans ce cas, il faut d'abord poser la règle perpendiculairement à la direction de PA_0 (ici AB), puis la faire tourner jusqu'à ce que l'équerre amène l'aiguille sur le

point C, de sorte qu'il suffit alors de faire parcourir au point K la longueur BC.

Chaque fois que l'on atteindra le point G, ABK sera facteur de ABCDEFG. Si toutes les racines sont réelles, cela arrivera cinq fois et pas davantage; si elles ne le sont pas toutes, on l'atteindra autant de fois qu'il y a de racines réelles.

Pour ne pas allonger outre mesure cette Communication, nous nous abstiendrons de faire ressortir toutes les conséquences intéressantes qui résultent de la correspondance des méthodes graphiques et symboliques. Ainsi, si toutes les racines sont réelles, le latère BC est la somme de tous les latères BK des facteurs. Si au lieu de x on veut $\frac{1}{x}$, on n'a qu'à retourner le 6-latère en prenant GF pour Λ_0 , FE pour Λ_1^* et ainsi de suite, et l'on a GFEDCBA correspondant à l'équation

$$\Lambda_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \Lambda_4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \Lambda_3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \Lambda_2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \Lambda_1 \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \Lambda_0 \left(\frac{1}{x}\right)^0 = 0.$$

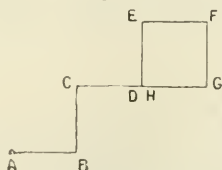
Il y aurait encore une foule d'autres considérations trop longues à énumérer. Cependant, nous croyons devoir faire une observation finale sommaire, qui a son importance. Chacun reconnaît l'importance théorique du théorème de Sturm pour la détermination du nombre des racines réelles entre deux limites données. Mais on sait aussi combien l'application pratique de cette méthode peut devenir pénible, presque impossible, même dans des cas relativement simples. Par exemple, pour l'équation

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

le nombre constant V_0 qui termine la suite des fonctions de Sturm n'a pas moins de *quarante-quatre chiffres*.

Or, si l'on représente graphiquement le polynôme ci-dessus,

Fig. 5.



en faisant $x = \sqrt{-1}$, on a le graphique ABCDEFGH; et le

premier venu, au bout de quelques instants, après quelques tâtonnements rapides à l'aide du petit instrument qui vient d'être décrit, pourra répondre à la question posée.

Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données; par M. A. DEMOULIN.

1. Cette congruence jouit d'un grand nombre de propriétés intéressantes qui ont été mises en évidence par MM. Ball ⁽¹⁾, Stahl ⁽²⁾ et Waelsch ⁽³⁾. Dans la présente Note, nous démontrons, au sujet de cette congruence, la proposition suivante, qui nous semble nouvelle :

Jointe à une congruence du premier ordre et de la première classe, la congruence actuelle constitue l'intersection complète des complexes de Painvin relatifs à deux quadriques dégénérées ⁽⁴⁾.

2. Soient D_1, D_2, D_3 les trois droites données et H l'hyperboloïde qu'elles déterminent. Nous appellerons *génératrices du premier système* les génératrices de cet hyperboloïde qui ne coupent pas D_1, D_2, D_3 , et *génératrices du second système* celles qui coupent ces droites. Tout complexe L passant par D_1, D_2, D_3 renferme toutes les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H . Cette propriété, dont la démonstration est immédiate, permet d'établir simplement l'équation générale des complexes L . Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde H rapporté à ses axes. Les équations

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX, p. 511.

(2) *Journal de Crelle*, t. 91, p. 1.

(3) *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Vienne; t. XCV, p. 781, 1887.

(4) Dans une Note insérée au tome XX de ce *Bulletin* (p. 122), nous avons appelé *complexe de Painvin* d'une quadrique le complexe des droites par lesquelles on peut mener à cette quadrique deux plans tangents rectangulaires.

d'une génératrice quelconque du premier système peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos \theta + \sin \theta,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin \theta - \cos \theta$$

ou

$$\frac{x - a \sin \theta}{a \cos \theta} = \frac{y + b \cos \theta}{b \sin \theta} = \frac{z}{c},$$

θ désignant un paramètre variable. Cette génératrice passe par le point $(a \sin \theta, -b \cos \theta, 0)$ et elle a pour coefficients de direction $a \cos \theta, b \sin \theta, c$; ses coordonnées homogènes (x, y, z, p, q, r) sont donc

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = a \cos \theta, & \beta = b \sin \theta, & \gamma = c, \\ p = -bc \cos \theta, & q = -ac \sin \theta, & r = ab. \end{cases}$$

Ces équations montrent que les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H appartiennent aux trois complexes linéaires

$$(2) \quad bcx + ap = 0, \quad ac\beta + bq = 0, \quad ab\gamma - cr = 0;$$

par conséquent, les complexes L, qui sont en nombre doublement infini, auront nécessairement une équation de la forme

$$(3) \quad \lambda(bc\alpha + ap) + \mu(ac\beta + bq) + ab\gamma - cr = 0,$$

λ et μ désignant deux paramètres arbitraires.

Soient (x, y, z, p, q, r) les coordonnées de l'axe central (1)

(1) Les coordonnées de l'axe central d'un complexe linéaire quelconque

$$Ax + By + Cz + Pp + Qq + Rr = 0$$

sont données par les formules

$$\begin{aligned} \alpha &= P, & \beta &= Q, & \gamma &= R, \\ p &= A - kP, & q &= B - kQ, & r &= C - kR, \\ k &= \frac{AP + BQ + CR}{P^2 + Q^2 + R^2}. \end{aligned}$$

d'un complexe L , on a

$$(4) \quad \begin{cases} x = \lambda a, & \beta = \mu b, & \gamma = -c, \\ p = \lambda(bc - ka), & q = \mu(ac - kb), & r = ab + kc, \end{cases}$$

$$k = \frac{abc(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{\lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + c^2}.$$

Ainsi se trouvent exprimées en fonction des deux paramètres λ et μ les coordonnées d'une droite quelconque de la congruence qui nous occupe.

Des formules (4) on déduit

$$(5) \quad q\gamma - r\beta = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b}\right) \beta\gamma = M\beta\gamma,$$

$$(6) \quad p\beta - q\alpha = \left(\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b}\right) \alpha\beta = N\alpha\beta.$$

Dans notre Note citée plus haut, nous avons fait voir que si

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0$$

est l'équation d'une quadrique quelconque, en coordonnées tangentielles, l'équation du complexe de Painvin de cette quadrique sera

$$\alpha^2(a' + a'') + \beta^2(a'' + a) + \gamma^2(a + a') - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(rx - p\gamma)c' + 2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0.$$

De la forme de cette équation résulte une conséquence immédiate : Si une congruence appartient aux complexes de Painvin de deux quadriques

$$Q(u, v, w) = 0, \quad Q'(u, v, w) = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$Q(u, v, w) + \rho Q'(u, v, w) = 0,$$

ρ désignant un paramètre variable.

Cela posé, observons que les équations (5) et (6) sont celles des complexes de Painvin des quadriques

$$Mvw + u = 0,$$

$$Nuv + w = 0.$$

Il suit de la remarque qui vient d'être faite que la congruence actuelle appartient au complexe de Painvin de la quadrique

$$Mvw + u + \rho(Nuv + w) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(7) \quad u(1 + N\rho v) + w\rho \left(1 + \frac{Mv}{\rho}\right) = 0.$$

Profitions de l'indétermination de ρ pour égaler les deux quantités entre parenthèses; nous aurons

$$N\rho = \frac{M}{\rho},$$

d'où

$$\rho = \varepsilon \sqrt{\frac{M}{N}},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 . Si l'on suppose que b est le plus grand des axes réels de l'hyperboloïde H , N sera positif et la valeur de ρ sera réelle. En tenant compte de cette valeur, l'équation (7) devient

$$(1 + \varepsilon v \sqrt{MN}) \left(u + \varepsilon w \sqrt{\frac{M}{N}} \right) = 0.$$

La congruence actuelle appartient donc aux complexes de Painvin des quadriques

$$(8) \quad (1 + v \sqrt{MN}) \left(u + w \sqrt{\frac{M}{N}} \right) = 0,$$

$$(9) \quad (1 - v \sqrt{MN}) \left(u - w \sqrt{\frac{M}{N}} \right) = 0.$$

L'équation (8) représente un système de deux points : l'un F ,

$$1 + v \sqrt{MN} = 0$$

est situé sur l'axe des y à une distance $-\sqrt{MN}$ de l'origine; l'autre F_2

$$u + w\sqrt{\frac{M}{N}} = 0$$

est à l'infini dans la direction d'une droite parallèle au plan des xz et faisant avec l'axe des x un angle ω donné par la formule

$$\tan \omega = \sqrt{\frac{M}{N}}.$$

Quant à l'équation (9), elle représente le système de deux points F'_1 et F'_2 définis comme il suit : F'_1 est le symétrique de F_1 par rapport à l'origine ; F'_2 est symétrique de F_2 par rapport à l'axe des z .

Appelons *angle sous lequel on voit d'une droite donnée un segment donné* l'angle des plans passant par la droite et par les extrémités du segment. Nous pourrions alors énoncer la propriété suivante :

De toute droite de la congruence qui nous occupe on voit sous des angles droits les segments $F_1 F_2$ et $F'_1 F'_2$.

3. Il ne nous reste plus maintenant qu'un mot à ajouter pour démontrer le théorème énoncé au n° 1. Les complexes de Painvin (5) et (6) ont en commun, outre la congruence actuelle, une congruence du premier ordre et de la première classe : celle des droites qui coupent l'axe des y à angle droit. Mais, comme on sait, la congruence actuelle est du troisième ordre et de la deuxième classe ; l'ensemble de ces deux congruences constitue donc bien l'intersection complète des complexes de Painvin (5) et (6).

Quelques remarques sur les équations du cinquième degré;
par M. D. SÉLIVANOFF.

En 1889, j'ai publié un Travail, en langue russe, *Sur les équations du cinquième degré à coefficients entiers*, dont je vais reproduire ici quelques résultats.

Soit proposée une équation irréductible

$$x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers.

Dans la suite nous dirons simplement *fonction des racines* pour désigner une *fonction entière à coefficients rationnels des racines de l'équation proposée*.

Ainsi que Galois l'a démontré, il existe un groupe de substitutions jouissant des deux propriétés suivantes : 1° Une fonction des racines ayant une valeur rationnelle ne change pas de valeur numérique par les substitutions du groupe ; 2° une fonction des racines dont la valeur numérique ne change pas par les substitutions du groupe a une valeur rationnelle. Ce groupe est nommé *groupe de l'équation*. Les substitutions contenues dans le groupe de l'équation, qui ne changent pas la valeur d'une fonction des racines, forment un groupe. Le groupe de l'équation irréductible est transitif. Désignons les racines de l'équation proposée par

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

et supposons que $x_a = x_b$, si $a \equiv b \pmod{5}$.

En changeant chaque racine x_z en x_{z+1} on exécute une substitution circulaire ou *cyclique* (x_z, x_{z+1}) que l'on désigne aussi par $(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4)$.

Le groupe d'une équation résoluble par radicaux est composé des substitutions de la forme (x_z, x_{az+b}) .

Soit G un groupe transitif donné

$$G = (s = 1, s_2, s_3, \dots, s_{5m}).$$

Ce groupe contient $5m$ substitutions, m désignant le nombre des substitutions qui laissent une racine invariable. On forme les vingt-quatre substitutions circulaires $(0 \ a \ b \ c \ d)$ en rempla-

çant a, b, c, d par les différents arrangements des quatre chiffres 1, 2, 3, 4.

Soit c_1 l'une de ces substitutions qui ne soit pas contenue dans le groupe G . Les $5m$ substitutions de la forme $s^{-1}c_1s$ ne sont pas contenues dans G , s étant une substitution du groupe G . Désignons ces substitutions par

$$(\alpha) \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \dots, \quad c_{5m}, \quad \dots$$

Si la substitution circulaire c'_1 n'est pas contenue dans G et dans la série (α) , on forme de la même manière la série

$$(\beta) \quad c'_1, \quad c'_2, \quad c'_3, \quad \dots, \quad c'_{5m}, \quad \dots$$

des substitutions circulaires qui ne sont contenues ni dans G , ni dans la série (α) . En procédant de la même manière, on conclut que *le nombre des substitutions circulaires qui n'est pas contenu dans le groupe G est un multiple de 5.*

Soit maintenant c une substitution circulaire contenue dans G . Les substitutions

$$(a) \quad c, \quad c^2, \quad c^3, \quad c^4,$$

sont aussi contenues dans G . Si la substitution circulaire c' est contenue dans G , mais non dans la série (a) , on forme la série

$$(b) \quad c', \quad c'^2, \quad c'^3, \quad c'^4$$

contenue dans le groupe G . On démontre de cette manière que *le nombre des substitutions circulaires contenues dans le groupe G est un multiple de 4.*

En désignant par $4y$ le nombre des substitutions cycliques qui sont contenues dans le groupe G et par $5z$ le nombre de celles qui ne sont pas contenues dans G , on obtient

$$4y + 5z = 24.$$

Les seules solutions de cette équation en nombres entiers et positifs sont

$$y = 1, \quad z = 4 \quad \text{et} \quad y = 6, \quad z = 0.$$

Dans le premier cas, le groupe G contient une substitution cyclique c avec ses puissances

$$c, \quad c^2, \quad c^3, \quad c^4.$$

Dans le second cas, le groupe G contient toutes les vingt-quatre substitutions cycliques.

Supposons que le groupe de l'équation G contienne un seul groupe cyclique

$$\Gamma = (1, s, s^2, s^3, s^4).$$

Les racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent être disposées dans un ordre tel qu'on ait

$$s = (x_z, x_{z+1}).$$

Il est possible que $G = \Gamma$. Dans le cas contraire, il existe une substitution

$$t = (x_z, x_{\varphi(z)}),$$

qui est contenue dans G , mais non dans Γ . La substitution transformée $t^{-1}st$ est cyclique et par conséquent contenue dans Γ . On a donc l'équation

$$t^{-1}st = s^a,$$

a étant un des nombres, 2, 3, 4. En multipliant les deux membres de cette équation à gauche par t , on trouve

$$st = ts^a,$$

ou, en d'autres termes,

$$\varphi(\bar{z} + 1) = \varphi(\bar{z}) + a.$$

En employant la notation du calcul des différences finies, on a

$$\Delta \varphi(\bar{z}) = a.$$

Il en résulte

$$\varphi(\bar{z}) = a\bar{z} + b;$$

par conséquent, *l'équation proposée est résoluble par radicaux.*

Les substitutions de la forme (x_z, x_{az+b}) peuvent former les groupes suivants :

1° *Le groupe cyclique* composé des substitutions

$$1, s, s^2, s^3, s^4,$$

où $s = (x_z, x_{z+1})$;

2° *Le groupe demi-métacyclique :*

$$1, s, s^2, s^3, s^4, \\ t, st, s^2t, s^3t, s^4t,$$

où $t = (x_z, x_{1z})$;

3^o Le groupe métacyclique :

$$\begin{array}{ccccc} 1, & s, & s^2, & s^3, & s^4, \\ u, & su, & s^2u, & s^3u, & s^4u, \\ u^2, & su^2, & s^2u^2, & s^3u^2, & s^4u^2, \\ u^3, & su^3, & s^2u^3, & s^3u^3, & s^4u^3, \\ u^4, & su^4, & s^2u^4, & s^3u^4, & s^4u^4, \end{array}$$

où $u = (x_z, x_{2z})$.

Ces dénominations sont dues à Kronecker.

Supposons maintenant que le groupe transitif G contienne toutes les substitutions cycliques. Le groupe G contient aussi la substitution

$$(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4)(0 \ 1 \ 4 \ 3 \ 2) = (0 \ 4 \ 1).$$

En transformant cette équation par les substitutions

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

on trouve

$$(0 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1)(0 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4) = (0 \ 1 \ 2),$$

$$(0 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1)(0 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4) = (0 \ 1 \ 3),$$

$$(0 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1)(0 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3) = (0 \ 1 \ 4).$$

Le groupe G contenant les substitutions $(0 \ 1 \ 2)$, $(0 \ 1 \ 3)$ et $(0 \ 1 \ 4)$ est donc *alterné*, ou bien contient le groupe alterné. Dans le dernier cas, G est l'ensemble des cent vingt substitutions que l'on peut former avec cinq lettres. Ce groupe peut être nommé *symétrique*.

Jacobi a indiqué (*Gesammelte Werke*, Band III, p. 276-278) la fonction demi-métacyclique de cinq lettres

$$\begin{aligned} z_1 = & x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_0 \\ & - x_0 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_4 - x_3 x_0 - x_4 x_1, \end{aligned}$$

dont la forme reste invariable par les substitutions du groupe demi-métacyclique.

Par les substitutions

$$(7) \quad (0 \ 1 \ 2), \quad (1 \ 2 \ 3), \quad (2 \ 3 \ 4), \quad (3 \ 4 \ 0), \quad (4 \ 0 \ 1)$$

contenues dans le groupe alterné la valeur z_1 se change en z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 .

La substitution (1 2 3 4) ne faisant pas partie du groupe alterné change $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ en $-z_1, -z_2, -z_4, -z_6, -z_3, -z_5$.

Telles sont les douze valeurs de la fonction z_1 . La fonction $z^2 = \tau_1$, ayant six valeurs différentes, est donc une fonction métacyclique.

La fonction

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6) \\ = z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6$$

ne change pas par les substitutions du groupe alterné.

Les substitutions qui ne sont pas contenues dans le groupe alterné changent a_1, a_3, a_5 en $-a_1, -a_3, -a_5$.

Ce sont donc les fonctions alternées et elles ont, par conséquent, la forme

$$a_1 = m_1 \sqrt{\Delta}, \quad a_3 = m_3 \sqrt{\Delta}, \quad a_5 = m_5 \sqrt{\Delta},$$

Δ étant le discriminant.

Les dimensions des fonctions a_1, a_3, a_5, Δ sont respectivement égales à 2, 6, 10, 20; par conséquent, a_1 et a_3 sont nuls et m_5 est un entier que nous désignerons par m .

Il résulte de cette analyse que

$$F(z) = z^6 + a_2 z^4 + a_4 z^2 + a_6 + m z \sqrt{\Delta}.$$

Les coefficients a_2, a_4, a_6 sont des fonctions entières à coefficients entiers des fonctions symétriques élémentaires

$$\Sigma x_0 = -p_1, \quad \Sigma x_0 x_1 = p_2, \quad \Sigma x_0 x_1 x_2 = -p_3, \\ \Sigma x_0 x_1 x_2 x_3 = p_4, \quad x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = -p_5.$$

Ainsi l'équation $F(z) = 0$, dont les racines sont $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$, a ses coefficients entiers. En remplaçant z^2 par τ dans l'expression $F(z)$ $F(-z)$, on obtient l'équation

$$\varphi(\tau) = (\tau^3 + a_2 \tau^2 + a_4 \tau + a_6)^2 - m^2 \Delta \tau = 0,$$

dont les racines sont

$$\tau_1 = z_1^2, \quad \tau_2 = z_2^2, \quad \tau_3 = z_3^2, \quad \tau_4 = z_4^2, \quad \tau_5 = z_5^2, \quad \tau_6 = z_6^2.$$

Supposons que l'équation $\varphi(\tau) = 0$ ait une racine α rationnelle

et, par conséquent, entière. En rangeant les racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 dans un ordre convenable, nous aurons $\sigma_1 = a$. Les substitutions qui changent la valeur numérique de σ_1 ne sont pas contenues dans le groupe de l'équation

$$f(x) = x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0.$$

Si l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ n'a pas de racines égales, les substitutions

$$(\gamma) \quad (0 \ 1 \ 2), \quad (1 \ 2 \ 3), \quad (2 \ 3 \ 4), \quad (3 \ 4 \ 0), \quad (4 \ 0 \ 1)$$

du groupe alterné changent la valeur σ_1 . Le groupe de l'équation proposée, ne contenant pas les substitutions (γ) , est donc métacyclique ou bien fait partie du groupe métacyclique. Dans ce cas, l'équation proposée est résoluble par radicaux.

Si l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ a des racines égales, il est possible que la valeur numérique σ_1 reste invariable pour certaines des substitutions (γ) . Supposons que le groupe de l'équation $f(x) = 0$ contienne le groupe alterné. La valeur σ_1 doit rester invariable pour toutes les substitutions du groupe alterné, car il n'existe pas de groupe transitif faisant partie du groupe alterné et contenant le groupe métacyclique. Il en résulte que

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - a)^6.$$

Nous obtenons l'identité suivante

$$(\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_4 \sigma + a_6)^2 - m^2 \Delta \sigma = (\sigma - a)^6,$$

qui peut être mise sous la forme

$$(\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_4 \sigma + a_6)^2 - (\sigma^3 - 3a \sigma^2 + 3a^2 \sigma - a^3)^2 = m^2 \Delta \sigma$$

ou

$$(2\sigma^3 + p\sigma^2 + q\sigma + r)(t\sigma^2 + u\sigma + v) = m^2 \Delta \sigma.$$

En égalant les coefficients de σ^5 , σ^4 et σ^3 dans les deux membres de cette équation, on trouve

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0,$$

et, par conséquent, Δ serait nul; or l'équation $f(x) = 0$ est supposée irréductible et son discriminant ne peut pas être nul. Il est

donc démontré que le groupe de l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas contenir le groupe alterné et l'équation proposée est aussi résoluble par radicaux dans le cas considéré.

Si l'équation $\varphi(\sigma) = 0$ n'a pas de racines rationnelles, les fonctions métacycliques n'étant pas rationnelles, le groupe de l'équation $f(x) = 0$ contient le groupe alterné et l'équation $f(x) = 0$ n'est pas résoluble par radicaux.

On a donc ce théorème :

Pour que l'équation irréductible

$$f(x) = x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0,$$

à coefficients entiers, soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que l'équation

$$\varphi(\sigma) = (\sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_4 \sigma + a_6)^2 - m^2 \Delta \sigma = 0$$

ait au moins une racine entière.

Pour les équations de la forme

$$f(x) = x^5 + ux + v = 0,$$

les valeurs de a_2 , a_4 , a_6 , m et Δ peuvent être obtenues presque sans calcul, comme l'a démontré M. Runge dans un article inséré au Tome VII des *Acta mathematica* (p. 173-186). On y trouve le résultat suivant :

$$\varphi(\sigma) = (\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)^2 - \Delta\sigma.$$

M. Runge met encore cette fonction sous la forme

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - u)^4 (\sigma^2 - 6u\sigma + 25u^2) - 5^5 v^4 \sigma.$$

Faisons $u = \pm 1$. La racine entière de l'équation

$$5^5 v^4 \sigma = (\sigma \mp 1)^4 (\sigma^2 \mp 6\sigma + 25)$$

doit être positive, car

$$\sigma^2 \mp 6\sigma + 25 = (\sigma \mp 3)^2 + 16.$$

Le nombre σ est diviseur de 25 et, par conséquent, les seules valeurs à examiner sont $\sigma = 1, 5, 25$.

Comme ces valeurs ne vérifient pas l'équation, on a le théorème suivant :

Les équations de la forme

$$x^5 + ux + v = 0 \quad (u = \pm 1)$$

ne sont pas résolubles par radicaux, quand elles sont irréductibles.

Ce théorème a été démontré par M. Runge dans le cas où $u = 1$.
La recherche des diviseurs linéaires de la fonction

$$f(x) = x^5 + ux + v$$

ne présente aucune difficulté. Pour trouver les diviseurs quadratiques, on divise $f(x)$ par $x^2 + a_1x + a_2$ et l'on égale à zéro le reste de la division. On a ainsi deux équations

$$(1) \quad a_2^2 - 3a_1^2a_2 + a_1^3 + u = 0,$$

$$(2) \quad a_1a_2(2a_2 - a_1^2) - v = 0,$$

qui servent à déterminer les nombres entiers a_1 et a_2 . Ces nombres doivent encore satisfaire aux conditions

$$|a_1| < 2\rho, \quad |a_2| < \rho^2,$$

ρ étant la limite supérieure des modules des racines de l'équation $f(x) = 0$. La recherche des diviseurs quadratiques est ainsi réduite à un nombre fini d'opérations.

L'impossibilité des équations (1) et (2) devient quelquefois manifeste, si les premiers membres de ces équations ne sont pas divisibles par un nombre premier. Soit l'équation

$$f(x) = x^5 + x - v, \quad v > 0.$$

Si l'on avait $v < 0$, il suffirait de remplacer $f(x)$ par $-f(-x)$.
En supposant, par exemple, $\rho = 6$, on a

$$v < 6^5 - 6 \quad \text{ou} \quad v < 7770.$$

La fonction $f(x)$ a des diviseurs linéaires pour

$$v = 1^5 + 1, \quad 2^5 + 2, \quad 3^5 + 3, \quad 4^5 + 4, \quad 5^5 + 5$$

ou

$$v = 2, \quad 34, \quad 246, \quad 1028, \quad 3430.$$

Cette fonction est divisible par $x^2 + a_1 x + a_2$, si les nombres entiers a_1 et a_2 satisfont aux équations

$$a_2^2 - 3a_1^2 a_2 + a_1^4 + 1 = 0, \quad a_1 a_2 (2a_2 - a_1^2) + v = 0.$$

En résolvant la première par rapport à a_2 , on obtient

$$2a_2 = 3a_1^2 + s,$$

où $s^2 = 5a_1^4 - 4$.

La seconde équation prend la forme

$$a_1(2a_1^2 + s)(3a_1^2 + s) = -2v.$$

Ayant trouvé les nombres entiers a_1 et s qui vérifient les conditions

$$5a_1^4 - s^2 = 4, \quad -12 < a_1 < 12,$$

on détermine les valeurs correspondantes de a_2 et v par les formules obtenues.

Si a_1 est pair, s est aussi pair. En posant

$$a_1 = 2z, \quad s = 4t \quad \text{ou} \quad 4t + 2,$$

on obtient les équations impossibles

$$20z^4 = 4t^2 + 1 \quad \text{ou} \quad 20z^4 = 4t^2 + 4t + 2;$$

d'où l'on conclut que a_1 est un nombre impair.

Supposons que a_1 soit divisible par un nombre premier p . Il suit de la congruence

$$s^2 \equiv -4 \pmod{p}$$

que le symbole de Legendre

$$\left(\frac{-4}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

doit être égal à 1. Donc p est de la forme $4k + 1$.

En excluant les valeurs paires de a_1 , ou divisibles par les nombres premiers de la forme $4k + 3$, nous n'obtenons que les valeurs suivantes

$$a_1 = \pm 1, \quad a_1 = \pm 5.$$

Pour $a_1 = \pm 1$, on trouve les résultats suivants

$$\begin{aligned}x^5 + x - 1 &= (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1), \\x^5 + x - 6 &= (x^2 - x + 2)(x^3 + x^2 - x - 3).\end{aligned}$$

La valeur $a_1 = \pm 5$ ne convient pas, car le nombre

$$5^5 - 4 = 3121$$

n'est pas un carré parfait. On a donc ce théorème :

Les équations de la forme

$$x^5 + x - v = 0 \quad (0 < v < 7770)$$

ne sont résolubles par radicaux que pour

$$v = 1, 2, 6, 34, 246, 1028, 3130.$$

Passons maintenant à l'équation

$$f(x) = x^5 - x - v = 0 \quad (v > 0),$$

en supposant toujours $v = 6$. On a encore

$$v < 6^5 - 6 \quad \text{ou} \quad v < 7770.$$

La fonction $f(x)$ a des diviseurs linéaires pour

$$v = 2^5 - 2, \quad 3^5 - 3, \quad 4^5 - 4, \quad 5^5 - 5$$

ou

$$v = 30, \quad 240, \quad 1020, \quad 3120.$$

La fonction $f(x)$ est divisible par $x^2 + a_1x + a_2$, si les nombres a_1 et a_2 vérifient les conditions

$$a_2^2 - 3a_1^2a_2 + a_1^3 - 1 = 0, \quad a_1a_2(2a_2 - a_1^2) + v = 0.$$

En déterminant les entiers a_1 et s de manière que

$$s^2 - 3a_1^2 = 4, \quad -12 \leq a_1 < 12,$$

on trouve les valeurs correspondantes de a_2 et v par les formules suivantes

$$\begin{aligned}2a_2 &= 3a_1^2 + s, \\a_1(2a_1^2 + s)(3a_1^2 + s) &= -2v.\end{aligned}$$

Le nombre a_1 est pair en même temps que s . En posant

$$a_1 = 2z, \quad s = 2t,$$

on trouve

$$20z^4 = (t+1)(t-1).$$

Le nombre t est impair, car le premier membre de cette équation est pair. Soit donc $t = 2m+1$; on a

$$5z^4 = m(m+1).$$

Les nombres m et $m+1$ sont premiers entre eux.

L'équation obtenue est impossible, car le nombre $5z^4$ n'est pas un produit de deux nombres consécutifs premiers entre eux. Il est donc démontré que a_1 est un nombre impair.

Supposons que a_1 soit premier ou une puissance d'un nombre premier. Il suit de l'équation

$$5a_1^4 = (s+2)(s-2)$$

que $5a_1^4$ doit être décomposable en deux facteurs dont la différence est 4. Ces facteurs ne peuvent donc pas avoir un diviseur commun autre que 2 ou 4. Il en résulte que

$$s+2 = 5a_1^4, \quad s-2 = 1,$$

ou bien

$$s+2 = -1, \quad s-2 = -5a_1^4$$

et, par conséquent,

$$s = \pm 3, \quad a_1 = \pm 1.$$

Si a_1 n'est pas égal à 5 ou à une puissance de 5, on a encore la décomposition

$$s+2 = a_1^4, \quad s-2 = 5,$$

ou

$$s+2 = -5, \quad s-2 = -a_1^4,$$

en supposant $a_1^2 > 1$. De là résulte l'équation impossible

$$a_1^4 = 9.$$

En examinant les seuls cas qui restent, $a_1 = \pm 1$, on trouve le résultat suivant

$$x^5 - x - 15 = (x^2 - x + 3)(x^3 + x^2 - 2x - 5).$$

en supposant toujours $x > 0$.

On peut donc énoncer ce théorème :

Les équations de la forme

$$x^5 - x - v = 0 \quad (0 < v < 7770)$$

ne sont résolubles par radicaux que pour

$$v = 15, \quad 30, \quad 240, \quad 1020, \quad 3120.$$

Toutes ces valeurs de v sont divisibles par 15.

Nous allons démontrer que l'équation

$$f(x) = x^5 - x - v = 0$$

n'est pas résoluble par radicaux, si v n'est pas multiple de 15.

Il suffit de démontrer l'irréductibilité de cette équation. Prenons 3 pour module. L'équation $f(x) = 0$ peut avoir une racine entière α , si une des congruences

$$f(0) \equiv 0, \quad f(1) \equiv 0, \quad f(-1) \equiv 0 \pmod{3}$$

a lieu.

En remarquant que pour l'équation considérée

$$f(0) \equiv -v, \quad f(1) \equiv -v, \quad f(-1) \equiv -v \pmod{3},$$

on conclut que l'équation proposée n'a pas de racines entières, si v n'est pas divisible par 3.

Supposons que $f(x)$ soit divisible par $x^2 + a_1x + a_2$. Les équations (1) et (2) peuvent être remplacées par les congruences

$$\alpha_1^2 + a_2 - 1 \equiv 0, \quad a_1a_2(\alpha_1^2 + a_2) \equiv -v \pmod{3}.$$

Si a_1 est divisible par 3, v l'est aussi. Si a_1 n'est pas divisible par 3, on a

$$\alpha_1^2 \equiv 1, \quad a_2 \equiv 0, \quad v \equiv 0 \pmod{3}.$$

Donc la fonction $f(x)$ n'a pas de diviseurs quadratiques, si v n'est pas divisible par 3.

Passons au module 5. D'après le théorème de Fermat, pour tout entier α , on a

$$\alpha^5 - \alpha \equiv 0 \pmod{5},$$

et, par conséquent,

$$f(\alpha) \equiv -v \pmod{5}.$$

Donc $f(x)$ n'a pas de diviseurs linéaires, si v n'est pas multiple de 5.

En supposant que $f(x)$ soit divisible par $x^2 + a_1x + a_2$, on

obtient les congruences

$$\begin{aligned} a_2(a_2 + 2a_1^2) + a_1^4 - 1 &\equiv 0 \pmod{5}, \\ a_1 a_2(2a_2 - a_1^2) + v &\equiv 0 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Le nombre v est divisible par 5 en même temps que a_1 ou a_2 . En posant $a_1 \equiv \pm 1 \pmod{5}$, on trouve

$$a_2(a_2 + 2) \equiv 0, \quad \pm a_2(2a_2 - 1) + v \equiv 0 \pmod{5}.$$

Si a_2 n'est pas divisible par 5, on a

$$a_2 \equiv -2, \quad 2a_2 - 1 \equiv 0, \quad v \equiv 0 \pmod{5}.$$

On démontre de la même manière qu'on a aussi $v \equiv 0 \pmod{5}$, quand $a_1 \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Propriétés d'un système de points dans un plan;

par M. FÉLIX LUCAS.

Considérons dans le plan un système quelconque de p points M, ayant pour affixes les racines de l'équation

$$(1) \quad F(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p) = 0.$$

Points centraux. — Les *points centraux* C de ce système sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre, en présence d'attractions inversement proportionnelles aux distances exercées par les points M doués de l'unité de masse. Ce sont les points racines de l'équation dérivée

$$(2) \quad F'(z) = p(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_{p-1}) = 0.$$

On a identiquement

$$(3) \quad F_m(z_m) = \left[\frac{F(z)}{z - z_m} \right]_{z=z_m} = F'(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad F_1(z_1) F_2(z_2) \dots F_p(z_p) = F'(z_1) F'(z_2) \dots F'(z_p).$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$\prod \overline{M_m M_n^2} = p^p \prod \overline{M_m C_n}.$$

c'est-à-dire que le produit des carrés des distances mutuelles d'un système de p points M est égal à p^p fois le produit des distances de ces points M à leurs points centraux C .

Dans le cas particulier où les points M occupent les sommets d'un polygone régulier de rayon R , tous les points C occupent le centre de ce polygone; on voit ainsi que le produit des carrés des distances mutuelles des p sommets d'un polygone régulier de rayon R est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. Ce théorème s'exprime par la formule trigonométrique

$$(5) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \sin \frac{m\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Conjugués d'un point quelconque S. — Considérons maintenant, en présence des points M , un point quelconque S du plan et soit τ son affixe. Les *conjugués* P de ce point, relativement au système M , sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre en présence des attractions des points M ayant l'unité de masse et de la répulsion du point S ayant la masse p . Ces conjugués de S sont les points racines de l'équation du degré $p-1$

$$p F(z) - (z - \tau) F'(z) = 0.$$

Le coefficient du terme du plus haut degré, c'est-à-dire le coefficient de z^{p-1} , est $p(\tau - \gamma)$, en désignant par γ l'affixe du centre des moyennes distances C des points donnés. On peut donc déterminer les affixes des conjugués de S , en égalant à zéro le polynôme

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{p F(z) - (z - \tau) F'(z)}{p(\tau - \gamma)} = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_{p-1}).$$

Cela posé, on a identiquement

$$(7) \quad p(\tau - \gamma) \varphi(z_m) = (\tau - z_m) F'(z_m) - (\tau - z_m) F_m(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(8) \quad p^p \frac{\varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \dots \varphi(\tau_p)}{F_1(\tau_1) F_2(\tau_2) \dots F_p(\tau_p)} = \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) \dots (\tau - \tau_p)}{(\tau - \gamma)^p}.$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$(9) \quad p^p \frac{\prod_{m=1}^p \overline{M_m P_n}}{\prod_{m=1}^p \overline{M_m M_n}^2} = \frac{\prod_{m=1}^p \overline{S M_m}}{S G^p};$$

c'est-à-dire que le produit des distances des points M aux conjugués P du point S , multiplié par p^p et divisé par le produit des carrés des distances des points M , est égal au produit des distances du point S aux points M , divisé par la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance de ce point S au centre des moyennes distances G de ces points M .

Dans le cas particulier où les points M occupent les p sommets d'un polygone régulier de rayon R , et où le point S est pris sur la circonférence circonscrite à ce polygone, la distance SG est égale à R et, en vertu d'un théorème précédent, le produit des carrés des distances des points M est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. La formule (9) devient alors

$$(10) \quad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \overline{M_m P_n} = R^{p(p-2)} \prod_{m=1}^{m=p} \overline{M_m S}.$$

En prenant le point G pour origine des coordonnées et la droite GM_1 pour axe des x , on a

$$(11) \quad F(\tau) = \tau^p - R^p$$

et

$$(12) \quad \varphi(\tau) = \tau^{p-1} - \frac{R^p}{\tau}.$$

Le module de τ est égal à R ; nous pouvons supposer le point S placé entre M_p et M_1 , et représenter son argument par -2ω , en désignant par ω un angle positif inférieur à $\frac{\pi}{p}$. L'équation (12) devient alors

$$(13) \quad \varphi(\tau) = \tau^{p-1} - R^{p-1} e^{2\omega i};$$

elle montre, en supposant $p > 3$, que les conjugués P de S occupent les $(p-1)$ sommets d'un polygone régulier de même rayon R que celui des points M. On trouve un de ces points P et un seul sur chacun des arcs $M_m M_{m+1}$, parmi lesquels ne figure pas l'arc $M_p M_1$ qui contient le point S. Le rayon GP_1 , correspondant au point situé sur l'arc $M_1 M_2$, fait avec GM_1 l'angle $\frac{2\omega}{p-1}$. On a, par suite, aux signes près,

$$(14) \quad \begin{cases} M_m S = 2R \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega \right], \\ M_m P_n = 2R \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi + \omega}{p-1} \right], \end{cases}$$

en sorte que la formule (10) devient, en faisant $R=1$,

$$(15) \quad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi + \omega}{p-1} \right] = \frac{1}{2^{p(p-2)}} \prod_{m=1}^{m=p} \sin \left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega \right].$$

On en déduit, pour $\omega = 0$,

$$(16) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \left(\frac{m\pi}{p} + \frac{n\pi}{p-1} \right) = \frac{(-1)^p (p-1)}{2^{p(p-2)}} \frac{1}{\prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \frac{n\pi}{p-1}}.$$

d'où, en tenant compte de la formule (5) dans laquelle on remplace m par n et p par $p-1$,

$$(17) \quad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin \left(\frac{m\pi}{p} - \frac{n\pi}{p-1} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{(p-1)(p-2)}}.$$

Sur les racines primitives; par M. FROLOV.

1. Euler fut amené à la conclusion, qu'il est impossible de saisir entre un nombre premier et ses racines primitives aucune relation, d'où l'on puisse déduire au moins une seule de ces racines, de sorte qu'on ne peut, d'après lui, les découvrir que par tâtonnements, c'est-à-dire en essayant différents nombres. Quoique Gauss ait donné une méthode très ingénieuse pour découvrir sans tâtonnements une racine primitive d'un module premier, cette méthode est tellement compliquée qu'on ne l'emploie guère. La complication de cette méthode apparaît déjà dans l'exemple donné par Gauss lui-même. En effet, pour découvrir que le nombre 5 est une racine primitive du nombre 73, il a dû former les périodes des trois nombres 2, 3 et 54, qui sont tous résidus quadratiques de 73, tandis qu'on serait arrivé au même résultat beaucoup plus vite, en commençant par essayer 5, comme le plus petit parmi les non-résidus quadratiques de 73, ce qui aurait épargné beaucoup de peine.

C'est probablement à cause de la complication de cette méthode que Poinso, dans ses *Réflexions sur la théorie des nombres*, publiées en 1845, proposa de déterminer les racines primitives d'un module premier m par l'exclusion des résidus des puissances, dont les exposants sont marqués par les facteurs premiers du nombre $(m - 1)$. Mais, comme l'a déjà remarqué le très regretté J.-A. Serret, cette méthode devient presque impraticable, dès que le module est un peu considérable.

Ainsi, pour déterminer les racines primitives d'un module premier, on est encore obligé, comme du temps d'Euler, de recourir aux essais de différents nombres. Évidemment, on doit prendre ces derniers parmi les non-résidus quadratiques du module, car il est facile de discerner les nombres qui sont résidus quadratiques de ceux qui ne le sont pas. Les résidus quadratiques sont d'abord les carrés inférieurs à m , savoir 1, 4, 9, 16, . . . ; puis, pour les modules de la forme $m = 4h - 1$, ce sont les nombres $h, h + 2, h + 6, h + 12, \dots$ tous compris dans la formule $x \equiv -\frac{m+x^2}{4}$, où x est un nombre indéterminé impair, et pour les modules $m = 4h + 1$, ce sont les nombres $-h, -h + 2, -h + 6,$

$= h + 12, \dots$; tous compris dans la formule $r \equiv \frac{m-x^2}{4}$, où x est aussi un nombre indéterminé impair. On reconnaît encore facilement si les nombres $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \dots$ sont résidus ou non-résidus quadratiques, d'après les formules déduites par Fermat, Euler et autres grands géomètres. Quant aux non-résidus quadratiques, on ne les détermine directement que pour les modules de la forme $4h-1$, car dans ce cas ce sont les compléments des carrés et des résidus quadratiques. Voici encore une proposition qui permettra de découvrir pour la plupart des modules premiers m quelques résidus et non-résidus quadratiques :

Soient $4p$ celui des deux nombres $(m-1)$ et $(m+1)$ qui est divisible par 4, et $2q$ l'autre qui ne l'est pas; tous les facteurs premiers de p et les facteurs premiers de q de la forme $4k+1$ sont résidus quadratiques de m , tandis que les facteurs premiers de q de la forme $4k-1$, ainsi que 2, si p est impair, sont non-résidus quadratiques.

On obtiendra d'autres résidus, en multipliant deux résidus ou deux non-résidus, et d'autres non-résidus, en multipliant un non-résidu par un résidu.

Par exemple, pour $m=191$, on a $m-1=190=2 \cdot 5 \cdot 19$, et $m+1=192=2^6 \cdot 3$; donc $p=2^4 \cdot 3$ et $q=5 \cdot 19$; par conséquent on aura les résidus 2, 3, 5, 6, 10, 15, ... et les non-résidus 19, 38, 57, 95, ... Pour $m=197$, on a $m-1=196=2^2 \cdot 7^2$ et $m+1=198=2 \cdot 3^2 \cdot 11$; donc $p=7^2$ et $q=3^2 \cdot 11$, et l'on aura les résidus 6, 7, 22, ... et les non-résidus 2, 3, 11, 14, ... Pour $m=263$, on a $m-1=262=2 \cdot 131$ et $m+1=264=2^3 \cdot 3 \cdot 11$; donc $p=2 \cdot 3 \cdot 11$ et $q=131$, et l'on aura les résidus 2, 3, 6, 11, ... et les non-résidus

$$131; \quad 131 \cdot 3 \equiv 130; \quad 130 \cdot 11 \equiv 120; \quad 120 \cdot 11 \equiv 10; \quad \dots$$

Il arrive souvent que les non-résidus obtenus de cette manière sont racines primitives. Ainsi, 191 a les racines primitives 19, 57 et 95; 197 a 2, 3 et 11; 263 a 131, 130, 120 et 10. Mais nous allons montrer qu'on n'aura à recourir aux essais de ce genre que dans des cas bien rares.

2. Il y a des cas, où les racines d'un module premier se déter-

minent immédiatement, sans aucun essai. Avant de les signaler, rappelons que l'on dit, avec Euler, que deux nombres sont *associés* entre eux, si leur produit est congru à 1. Ainsi a et b sont associés entre eux, s'il y a la congruence $ab \equiv 1 \pmod{m}$. Leurs complémentaires à m sont aussi associés entre eux, car on a $(m-a)(m-b) \equiv -a-b \equiv ab \equiv 1$. En changeant les signes, on aura $-ab \equiv -1$; donc le produit d'un nombre a par le complément de son associé $-b$ est congru à -1 . Pour abréger, nous dirons que deux nombres, dont le produit est congru à -1 , sont *contre-associés* entre eux.

Dans un groupe de quatre termes $a, b, -b, -a$, chacun d'eux a son associé, son contre-associé et son complémentaire à m . Nous dirons que a et $-a$ sont les *termes extrêmes*, et b et $-b$ sont les *termes moyens* de ce groupe.

On sait que deux nombres complémentaires 1 et $m-1 \equiv -1$ sont associés chacun à lui-même, car $1^2 \equiv 1$ et $(-1)^2 \equiv 1$. Ajoutons qu'ils sont contre-associés l'un de l'autre, car on a $1(-1) \equiv -1$. Donc ces deux nombres forment un groupe complet, qu'on peut écrire de la manière suivante 1, 1, -1 , -1 .

Pour $m = 4h + 1$, il y a encore deux autres nombres complémentaires, que nous désignerons par ω et $-\omega$, qui sont associés entre eux, en satisfaisant à la congruence $-\omega^2 \equiv 1 \pmod{m}$. En changeant les signes, on aura $\omega^2 \equiv (\pm \omega)^2 \equiv -1$, ce qui signifie que chacun de ces deux nombres est contre-associé à lui-même. Ces nombres forment le groupe complet $\omega, -\omega, \omega, -\omega$.

Les nombres ω et $-\omega$, ainsi que 1 et -1 , sont résidus de tous les degrés impairs qui sont facteurs de $(m-1)$, pour tous les modules m au-dessus de 5.

En effet, soit g une racine primitive quelconque de $m = 4h + 1$.

On aura $g^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1$, et comme on a $\omega^2 \equiv -1$, il viendra $\omega^2 \equiv g^{\frac{m-1}{2}}$, d'où l'on tire

$$\pm \omega \equiv \pm g^{\frac{m-1}{4}} \equiv \pm g^h.$$

Il en résulte : 1° que si h est impair, ω et $-\omega$ sont résidus de tous les degrés impairs de h et de $(m-1)$, et 2° que si h est pair, ils sont en outre résidus quadratiques de m .

Par exemple, pour $m = 37 = 4 \cdot 9 + 1$ et $h = 9$, on a $w = 6$ et $-\alpha = 31$, qui sont résidus seulement du troisième degré, car h est impair; tandis que, pour $m = 41 = 4 \cdot 10 + 1$ et $h = 10$, on a $\alpha = 9$ et $-\alpha = 32$, qui sont résidus du cinquième degré et résidus quadratiques, car h est pair.

3. Nous signalerons trois cas, où les non-résidus quadratiques d'un module sont ses racines primitives.

I. *Tout module premier de la forme $m = 2^{2c} + 1$, où c est un nombre quelconque, a pour racines primitives tous ses non-résidus quadratiques et entre autres les nombres 3, 5 et 10.*

C'est évident, car le nombre $m - 1 = 2^{2c}$ n'ayant qu'un seul facteur premier 2, tous les nombres inférieurs à m sont résidus ou non-résidus quadratiques, et tous ces derniers sont nécessairement racines primitives de m ; et comme les nombres premiers de la forme $2^{2c} + 1$ appartiennent aux formes $8h + 1$, $12h + 5$ et $10h + 3$, il s'ensuit qu'ils ont le résidu quadratique 2 et les non-résidus 3 et 5, qui sont par conséquent leurs racines primitives, ainsi que 10, qui est le produit d'un résidu par un non-résidu. Par exemple, les modules $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$, $65537 = 2^{16} + 1$, ... ont tous les racines primitives 3, 5 et 10 et n'ont pas la racine primitive 2.

II. *Tout module premier de la forme $m = 2n + 1$, où n est un nombre premier impair, a pour racines primitives également tous ses non-résidus quadratiques, sauf $m - 1 \equiv -1$.*

En effet, dans ce cas, il n'y a que deux résidus du degré impair n , et comme ce sont les nombres 1 et -1 , tous les autres nombres sont résidus ou non-résidus quadratiques, et ces derniers sont nécessairement racines primitives de m . Par exemple, $m = 26063 = 2 \cdot 13031 + 1$, étant de la forme $8h + 3$, a le non-résidu quadratique 2; par conséquent ce nombre est une racine primitive de 26063.

III. *Tout module premier $m = 4n + 1$, où n est un nombre premier impair, a de même pour racines primitives tous ses non-résidus quadratiques.*

En effet, dans ce cas, il y a quatre résidus du degré n , qui sont les nombres 1 , -1 , w et $-w$, tandis que tous les autres nombres sont résidus ou non-résidus quadratiques, et ces derniers sont nécessairement racines primitives de m . Par exemple, pour $m = 32069 = 4.8017 + 1$, qui appartient aux formes $8h - 3$ et $12h - 3$, les nombres 2 et 3 sont non-résidus quadratiques, et par conséquent ils sont racines primitives de 32069 .

4. Nous allons exposer brièvement, en omettant les démonstrations peu essentielles, un procédé qui permettra de découvrir rapidement les racines primitives de la plupart des nombres, sans aucun essai.

Il consiste dans le déploiement des $(m - 1)$ nombres, inférieurs au module m , en chaînes de groupes de quatre termes, associés, contre-associés et complémentaires, que nous avons considérés dans le n° 2; ces chaînes sont très faciles à construire, car il est permis de faire l'échange des facteurs entre deux nombres associés ou contre-associés, et comme l'un des deux termes extrêmes ou moyens est toujours pair, on peut le diviser par 2, en multipliant par 2 son associé ou contre-associé, le plus petit des deux.

Il en résultera deux nouveaux termes associés ou contre-associés et l'on n'aura qu'à y adjoindre leurs complémentaires à m , pour obtenir un groupe nouveau.

Par exemple, on a, pour $m = 281$, le groupe

$$24, \quad 82, \quad 199, \quad 257.$$

En multipliant par 2 le terme 24 et en divisant par 2 le terme 82, on obtiendra le groupe

$$48, \quad 41, \quad 240, \quad 233.$$

Si, au contraire, on multiplie par 2 le terme 82, en divisant par 2 le terme 24, on aura le groupe

$$12, \quad 164, \quad 117, \quad 269.$$

Ces trois groupes formeront une portion d'une chaîne

$$\dots \quad 12, \quad 164, \quad 117, \quad 269; \quad 24, \quad 82, \quad 199, \quad 257; \quad 48, \quad 41, \quad 240, \quad 233; \quad \dots,$$

qu'on pourra prolonger des deux côtés, en répétant la même opération, jusqu'à ce qu'on arrive à des groupes qui ne puissent plus en produire de nouveaux, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive des deux côtés au même groupe.

Dans le premier cas on aura une *chaîne ouverte*, terminée par deux groupes, que nous appellerons *groupes d'arrêt*. Il y a quatre espèces de groupes d'arrêt :

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ} & 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1; \qquad 2^{\circ} \quad w, \quad -w, \quad w, \quad -w, \\ 3^{\circ} & u, \quad -2u, \quad 2u, \quad -u; \qquad 4^{\circ} \quad v, \quad 2v, \quad -2v, \quad -v, \end{array}$$

que nous désignerons respectivement par les notations abrégées $[1]$, $[w]$, $[u]$, $[v]$.

Dans le dernier cas, la chaîne rentre en elle-même et nous dirons qu'elle est *circulaire* ou *fermée*.

Pour m de la forme $4h - 1$, il n'y a pas de groupe w ; donc il n'y aura qu'une seule chaîne ouverte, terminée par $[1]$ et $[u]$, si h est impair, ou par $[1]$ et $[v]$, si h est pair.

Pour m de la forme $4h + 1$, il y a aussi une seule chaîne ouverte, terminée par $[1]$ et $[w]$, si h est impair. Au contraire, si h est pair, on a deux chaînes ouvertes, terminées par quatre groupes d'arrêt : $[1]$, $[w]$, $[u]$, $[v]$.

Remarquons ici qu'il est indifférent de multiplier ou de diviser par 2 l'un ou l'autre terme complémentaire, car le résultat reste le même. En effet, soit g une racine primitive de m et $a \equiv g^l$. Alors un groupe quelconque $a, b, -b, -a$ peut être représenté de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} g^l, \quad g^{m-1-l}, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l}, \quad g^{\frac{m-1}{2}+l}, \\ \text{car on a} \\ g^l \cdot g^{m-1-l} = g^{m-1} = 1, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l} \cdot g^{\frac{m-1}{2}+l} = g^{m-1} = 1. \end{array}$$

Soit $2 \equiv g^k$. En multipliant par 2 le premier terme g^l , on aura

$$g^{l+k}, \quad g^{m-1-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}+l+k}$$

et, si l'on multiplie par 2 le dernier terme $g^{\frac{m-1}{2}+l}$, on aura également

$$g^{l+k}, \quad g^{m-1-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}-l-k}, \quad g^{\frac{m-1}{2}+l+k}.$$

Donc le résultat est le même dans les deux cas.

5. Si, en commençant une chaîne par le groupe [1], on parvient à englober dans cette chaîne ouverte tous les $(m-1)$ nombres inférieurs à m , on en conclura que m , s'il est de la forme $4h+1$, a les racines primitives 2 et -2 , ou l'une de ces racines primitives, s'il est de la forme $4h-1$.

C'est évident, car dans ce cas ce procédé n'est autre chose que la formation de la période du nombre 2 ou -2 . Comme on a

$$g^{m-1} \equiv 1, \quad g^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 \pmod{m},$$

un groupe quelconque peut être représenté de la manière suivante :

$$g^l, \quad g^{-l}, \quad -g^{-l}, \quad -g^l.$$

Si $g = 2$ ou -2 , et l est un nombre indéterminé, on aura

$$2^l, \quad 2^{-l}, \quad -2^{-l}, \quad -2^l;$$

donc tous les termes sont compris dans la formule $\pm 2^{\pm l}$, et il est clair que si une chaîne englobe tous les $(m-1)$ nombres, 2 et -2 ou l'un de ces nombres est racine primitive, selon que m est de la forme $4h+1$ ou $4h-1$.

Pour m de la forme $4h-1$, si la chaîne est terminée par [u], c'est 2 qui est la racine primitive, et si elle est terminée par [v], c'est -2 .

En effet, si 2 est racine primitive, le dernier groupe sera

$$\frac{m-3}{2^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{m-1-\frac{m-3}{4}}{2}, \quad \frac{m-1-\frac{m-3}{4}}{2^{\frac{3}{4}}}, \quad \frac{m-1+\frac{m-3}{4}}{2^{\frac{3}{4}}}$$

ou

$$\frac{m-3}{2^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{3m-1}{2^{\frac{3}{4}}}, \quad \frac{m+1}{2^{\frac{3}{4}}}, \quad \frac{3m-5}{2^{\frac{3}{4}}}.$$

En le ramenant à la forme

$$\frac{m-3}{2^{\frac{1}{4}}}, \quad 2 \cdot 2^{\frac{3m-5}{4}}, \quad 2 \cdot 2^{\frac{m-3}{4}}, \quad 2^{\frac{3m-5}{4}},$$

on voit que le troisième terme est le double du premier, et le deuxième terme est le double du quatrième, de sorte que ce groupe appartient à la forme [u]. Au contraire, si la chaîne est terminée par le groupe [v], cela indiquera que 2 n'est pas une ra-

cine primitive de m , et par conséquent c'est -2 qui l'est nécessairement.

Ainsi le déploiement des nombres en chaîne permet de déterminer rapidement, si le module proposé a les racines primitives 2 et -2 ou l'une de ces racines.

Éclaircissons ceci par quelques exemples :

1° Soit $m = 61 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, de la forme $4h + 1$. En commençant par le groupe (1), on formera la chaîne

1,	1,	60,	60;	2,	31,	30,	59;	4,	46,	15,	57;
8,	23,	38,	53;	16,	42,	19,	45;	32,	21,	40,	29;
3,	41,	20,	58;	6,	51,	10,	55;	12,	56,	5,	49;
24,	28,	33,	37;	48,	14,	47,	13;	35,	7,	54,	26;
9,	34,	27,	52;	18,	17,	44,	43;	36,	39,	22,	25;
11,	50,	11,	50.								

qui est terminée par le groupe [w] et contient tous les soixante nombres inférieurs au module 61. Donc, comme ce module est de la forme $4h + 1$, il a les racines primitives 2 et $-2 \equiv 59$.

2° Soit $m = 67 = 2 \cdot 3 \cdot 11 + 1$, de la forme $4h - 1$. En commençant par le groupe (1), on formera la chaîne :

1,	1,	66,	66;	2,	34,	33,	65;	4,	17,	50,	63;
8,	42,	25,	59;	16,	21,	46,	51;	32,	44,	23,	35;
64,	22,	45,	3;	61,	11,	56,	6;	55,	39,	28,	12;
43,	53,	14,	24;	19,	60,	7,	48;	38,	30,	37,	29;
9,	15,	52,	58;	18,	41,	26,	49;	36,	54,	13,	31;
5,	27,	40,	62;	10,	47,	20,	57,				

qui est terminée par le groupe [u]; donc 67 a la racine primitive 2.

3° Soit $m = 71 = 2 \cdot 5 \cdot 7 + 1$, de la forme $4h - 1$. On aura la chaîne

1,	1,	70,	70;	2,	36,	35,	69;	4,	18,	53,	67;
8,	9,	62,	63;	16,	40,	31,	55;	32,	20,	51,	39;
64,	10,	61,	7;	57,	5,	66,	14;	43,	38,	33,	28;
15,	19,	52,	56;	30,	45,	26,	41;	60,	58,	13,	11;
49,	29,	42,	22;	27,	50,	21,	44;	54,	25,	46,	17;
37,	48,	23,	34;	3,	24,	47,	68;	6,	12,	59,	65;

qui est terminée par le groupe [c]; donc 71 a la racine primitive $-2 \equiv 69$.

6. Le déploiement en chaîne des groupes de nombres associés et contre-associés permet en même temps de reconnaître les résidus de tous les degrés et toutes les racines primitives.

Pour $m = 4h + 1$, les termes 1 et -1 du groupe initial [1] étant résidus de tous les degrés, il s'ensuit que les groupes des rangs impairs 1, 3, 5, 7, ... seront composés de résidus quadratiques. Tels sont, pour $m = 61$, les groupes

$$\begin{array}{llll} 1, & 1, & 60, & 60; & 4, & 46, & 15, & 57; & 16, & 42, & 19, & 45; \\ 3, & 41, & 20, & 58; & 12, & 56, & 5, & 49; & 48, & 14, & 47, & 13; \\ 9, & 34, & 27, & 52; & 36, & 39, & 22, & 25. \end{array}$$

Comme pour ce module on a $m - 1 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, il y aura encore les résidus de degrés impairs 3 et 5. Les groupes composés de résidus du troisième degré occupent les rangs 1, 4, 7, 10, ... Tels sont les groupes

$$\begin{array}{llll} 1, & 1, & 60, & 60; & 8, & 23, & 38, & 53; & 3, & 41, & 20, & 58; \\ 24, & 28, & 33, & 37; & 9, & 34, & 27, & 52; & 11, & 50, & 11, & 50. \end{array}$$

Les groupes composés des résidus du cinquième degré occupent les rangs 1, 6, 11, 16. Tels sont les groupes

$$\begin{array}{llll} 1, & 1, & 60, & 60; & 32, & 21, & 40, & 29; \\ 48, & 14, & 47, & 13; & 11, & 50, & 11, & 50. \end{array}$$

Tous les autres groupes

$$\begin{array}{llll} 2, & 37, & 30, & 59; & 6, & 51, & 10, & 55; \\ 35, & 7, & 54, & 26; & 18, & 17, & 44, & 43, \end{array}$$

sont composés de racines primitives.

Pour $m = 4h - 1$, les termes 1 et -1 du groupe initial, étant aussi résidus de tous les degrés impairs, on déterminera ces derniers comme dans le cas précédent. Quant aux résidus quadratiques, il y a à considérer deux cas : 1° Si la racine primitive est -2 , les deux premiers termes de tous les groupes sont résidus quadratiques, et les deux derniers termes, tant qu'ils ne sont pas résidus d'aucun degré impair, sont racines primitives. Ainsi, pour

$m = 71$, les termes 2,36; 4,18; 8,9; 16,40; 32,20; ... sont résidus quadratiques, tandis que les termes 35,69; 53,67; 62,63; 31,55; 61,7; 33,28; 52,56; 31,11; 42,22; 21,44; 47,68; 59,65 sont racines primitives. 2° Si la racine primitive est 2, les deux premiers et les deux derniers termes des groupes consécutifs sont à tour de rôle résidus quadratiques ou racines primitives, tant qu'ils ne sont pas résidus de degrés impairs. Ainsi, pour $m = 67$, les termes 33,65; 4,17; 25,59; 16,21; ... sont résidus quadratiques, tandis que les termes 2,34; 50,63; 46,51; 32,44; 61,11; 28,12; 7,48; 18,41; 13,31; 20,57 sont racines primitives.

7. Si la chaîne, commencée par le groupe [1], s'arrête sans avoir englobé tous les $(m - 1)$ nombres, il faut déployer en d'autres chaînes les nombres qui ne sont pas entrés dans la première chaîne. Pour cela, on n'a pas besoin de faire de longs calculs pour déterminer deux nombres associés, car on trouvera toujours dans la première chaîne deux termes associés ou contre-associés qui, par l'échange de leurs facteurs, donneront deux nouveaux termes associés ou contre-associés, qui serviront à la formation d'une chaîne nouvelle. Par exemple, pour $m = 151$, la chaîne, commencée par le groupe [1], contient le groupe

$$32, \quad 118, \quad 33, \quad 119,$$

sans contenir le terme 3. On trouvera le groupe contenant ce dernier, en divisant par 11 le terme 33 et en multipliant par le même facteur son contre-associé 32; on aura ainsi le groupe

$$3, \quad 101, \quad 50, \quad 148,$$

qui servira à la formation d'une seconde chaîne.

Après avoir déployé en chaînes tous les $(m - 1)$ nombres, on écartera celles qui sont composées entièrement de résidus.

On n'aura en général que deux ou trois chaînes et rarement plus de six. Pour $m = 4h - 1$ on n'aura qu'une seule chaîne ouverte et quelques chaînes fermées, et ce ne sont que ces dernières qui peuvent contenir des racines primitives. Pour $m = 4h + 1$ et h impair, comme nous l'avons déjà dit au n° 4, il y aura aussi une seule chaîne ouverte et quelques chaînes fermées; et si h est pair,

on aura deux chaînes ouvertes, et dans ce cas, s'il n'y a pas de chaînes fermées, c'est la chaîne ouverte, terminée par les groupes $[u]$ et $[v]$, qui contiendra toutes les racines primitives; autrement ces dernières se trouveront dans des chaînes fermées.

Il est très aisé de reconnaître et d'exclure les résidus dans une chaîne ouverte, terminée par $[u]$ et $[v]$, car le groupe central de ces chaînes est composé de résidus de tous les degrés impairs, et les groupes composés de résidus d'un degré impair quelconque sont disposés à des distances égales, marquées par l'exposant de ce degré. Après cette exclusion, les groupes qui resteront contiendront les racines primitives.

Quant aux chaînes fermées, qui n'ont pas de groupe central, on reconnaîtra les groupes composés de résidus d'après de certains caractères que nous allons signaler. Remarquons d'abord que, si le nombre de termes d'une chaîne fermée n'est pas divisible par un des facteurs de $(m - 1)$, cette chaîne ne contiendra pas un seul résidu du degré dont l'exposant est marqué par ce facteur, ou bien tous ses termes seront résidus de ce degré.

Par exemple, pour $m = 127 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 + 1$, on a quatre chaînes fermées, chacune de 28 termes; ce nombre n'étant pas divisible par le facteur 3, et comme il y a $\frac{126}{3} = 42$ résidus de troisième degré, une de ces chaînes, ainsi que la chaîne ouverte qui a 14 termes, est composée entièrement de résidus du troisième degré. On reconnaîtra facilement cette chaîne fermée, car on y trouve le cube 27.

Il y a des cas, pour les modules de la forme $4h + 1$, où une chaîne fermée est composée entièrement de racines primitives. Cela arrive quand 2 et -2 sont résidus de tous les degrés dont les exposants sont facteurs de $(m - 1)$.

Par exemple, pour $m = 433 = 2^4 \cdot 3^3 + 1$, il y a une chaîne fermée de 144 termes qui sont tous racines primitives de 433.

8. Les exemples suivants, pris parmi les cas les plus simples, suffiront à éclaircir l'application de notre procédé à la recherche des racines primitives :

1. Si m est de la forme $2^n c + 1$, où n est un nombre premier impair et c est un nombre entier quelconque, tous les résidus

du degré impair n seront contenus dans la chaîne ouverte, commencée par le groupe $[1]$, de sorte que, pour trouver les racines primitives, on n'aura qu'à séparer les non-résidus quadratiques, qui seront tous racines primitives.

En effet, dans ce cas, 2 et -2 , ne pouvant pas être simultanément résidus quadratiques, car m est de la forme $4h - 1$, sont nécessairement résidus du degré impair n .

Prenons une racine primitive quelconque g et posons $2 \equiv g^k$. L'exposant k doit contenir le facteur n , et comme tous les termes de la chaîne, commencée par $[1]$, sont de la forme $\pm 2^{\pm l}$, cette forme deviendra $\pm (g^k)^{\pm l} \equiv \pm g^{\pm kl}$, et, l'exposant kl contenant le facteur n , tous les termes de la chaîne seront résidus du degré n .

Par exemple, pour $m = 251 = 2 \cdot 5^3 + 1$, la chaîne ouverte, commencée par $[1]$, contient tous les 50 résidus du cinquième degré, de sorte que tous les autres nombres, en dehors de cette chaîne, sont résidus ou non-résidus quadratiques, et ces derniers sont nécessairement racines primitives. Ainsi le non-résidu $251 - 15^2 = 26$ est racine primitive de 251.

II. Pour $m = 4n^c + 1$, où n est un nombre premier impair et c un nombre entier quelconque, la chaîne ouverte contiendra également tous les résidus du degré n .

En effet, dans ce cas m n'étant pas de la forme $8h + 1$, les nombres 2 et -2 ne sont pas résidus quadratiques, et par conséquent ils sont résidus du degré n .

Par exemple, pour $m = 109 = 2^2 \cdot 3^3 + 1$, la chaîne ouverte, commencée par $[1]$, englobe tous les 36 résidus du troisième degré, et tous les non-résidus quadratiques qui n'entrent pas dans cette chaîne sont racines primitives. À l'aide de la proposition que nous avons donnée au numéro 1, on trouve que 11 est non-résidu quadratique de 109; par conséquent ce nombre et son associé 10 sont racines primitives de ce module.

III. Pour les modules de la forme $m = 6N + 1$, où N est un nombre quelconque, premier ou composé, pair ou impair, il y a un groupe dont deux termes associés diffèrent d'une unité

avec deux autres termes associés, et tous ces termes sont résidus de tous les degrés marqués par les facteurs du nombre N .

Cette proposition permettra de reconnaître facilement les résidus et les racines primitives dans les chaînes fermées, si l'on y trouve un groupe de cette espèce.

En représentant ce groupe par

$$a, \quad b, \quad a+1, \quad b+1$$

et en appelant *termes mineurs* les termes a et b et *termes majeurs* les termes $(a+1)$ et $(b+1)$, on démontrera sans peine :

1° Que le carré d'un terme mineur est congru à son associé et celui d'un terme majeur est congru à son contre-associé, de sorte qu'on aura

$$a^2 \equiv b, \quad b^2 \equiv a, \quad (a+1)^2 \equiv a, \quad (b+1)^2 \equiv b, \quad \dots \quad (\text{mod. } m);$$

2° Que le cube d'un terme mineur est congru à 1, et celui d'un terme majeur est congru à -1 . Ainsi l'on aura

$$a^3 \equiv 1, \quad b^3 \equiv 1, \quad (a+1)^3 \equiv -1, \quad (b+1)^3 \equiv -1, \quad \dots \quad (\text{mod. } m);$$

3° Que si g est une racine primitive quelconque, le groupe de cette espèce sera représenté de la manière suivante

$$g^N, \quad g^{5N}, \quad g^{2N}, \quad g^{4N}.$$

Par exemple, pour $m = 223 \equiv 6.37 + 1$ et $N = 37$, on a le groupe

$$184, \quad 40, \quad 183, \quad 39$$

qui peut être représenté ainsi

$$g^{37}, \quad g^{185}, \quad g^{74}, \quad g^{148};$$

4° Que si N est un nombre premier, on aura deux chaînes : la chaîne ouverte englobera tous les résidus du troisième degré, tandis que la chaîne circulaire contiendra un groupe $a, b, a+1, b+1$, composé de quatre résidus du degré N , les deux autres résidus de ce degré étant les termes 1 et -1 de la chaîne ouverte.

Par exemple, pour $m = 31 \equiv 6.5 + 1$, on a deux chaînes :

$$\begin{array}{l} \text{A.} \quad 1, \quad 1, \quad 30, \quad 30; \quad 2, \quad 16, \quad 15, \quad 29; \quad 4, \quad 8, \quad 23, \quad 27. \\ \text{B.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3, \quad 21, \quad 10, \quad 28; \quad 6, \quad 26, \quad 5, \quad 25; \\ 12, \quad 13, \quad 18, \quad 19; \quad 24, \quad 22, \quad 9, \quad 7; \quad 17, \quad 11, \quad 20, \quad 14. \end{array} \right. \end{array}$$

Les dix termes de la chaîne A sont résidus du troisième degré, et les termes 6, 26, 5, 25 de la chaîne B sont résidus du cinquième degré, et comme le module 31 est de la forme $12h - 5$, le nombre 3 est non-résidu quadratique, et par conséquent il est racine primitive, ainsi que son associé 21 et les deux premiers termes de tous les groupes de la chaîne B, excepté 6 et 26, qui sont résidus du cinquième degré.

Généralement, pour $m = 4h - 1$, si h est pair, comme cela a lieu pour $m = 31 = 4 \cdot 8 - 1$, ce sont tous les premiers ou tous les derniers termes des groupes qui sont racines primitives, sauf ceux qui sont résidus de degrés impairs, et au contraire, si h est impair, ce sont, à tour de rôle, les premiers et les derniers termes des groupes consécutifs qui sont racines primitives, comme cela a lieu pour $m = 43 = 4 \cdot 11 + 1$.

C'est d'après les caractères que nous venons de signaler et quelques autres moins saillants, que l'on reconnaîtra dans des chaînes fermées les résidus de tous les degrés. Après les avoir éliminés, on aura les racines primitives. Il est facile d'appliquer ce procédé aux modules de toutes les formes, telles que $m = 8n + 1$, $12n + 1$, ... et à d'autres, où le nombre $(m - 1)$ contient plusieurs facteurs différents, mais nous ne le ferons pas pour ne pas sortir des limites assignées à ce Mémoire. Il nous semble que ce procédé permettra de découvrir les racines primitives, ainsi que les résidus de tous les degrés, beaucoup plus rapidement que les méthodes dont nous avons parlé au n° 1.

9. Pour compléter ce Mémoire, disons quelques mots d'un autre procédé, mentionné par quelques auteurs, qui permet de découvrir sans essais les racines primitives des modules de la forme $4h - 1$. Ce procédé est fondé sur le théorème suivant :

Pour tout module $m = 4h - 1$, si l'on multiplie deux nombres complémentaires à m , tels que a et $m - a \equiv -a$, le produit $a(m - a) \equiv -a^2$ sera racine primitive, dans le cas où l'un de ces nombres est racine primitive.

En effet, soit g une racine primitive de m et $a \equiv g^k$; en changeant les signes on aura $-a \equiv -g^k \equiv g^{\frac{m-1}{2} + k}$, et en multi-

pliant ces deux congruences on trouvera $a^2 \equiv g^{\frac{m-1}{2} + gk}$.

Si a est racine primitive, l'exposant k est premier avec $m-1$, et comme $\frac{m-1}{2} = 2h-1$ n'a pas de facteur 2, l'exposant $\frac{m-1}{2} + 2k$ sera aussi premier avec $(m-1)$, et par conséquent le produit $a(m-a) \equiv -a^2$, que nous désignerons par a_1 , sera également racine primitive de m .

En répétant cette opération jusqu'à ce qu'on retrouve l'un des nombres initiaux a ou $(m-a) \equiv -a$, on aura une suite de produits

$$-a_1^2 \equiv a_1, \quad -a_1^2 \equiv a_2, \quad -a_2^2 \equiv a_3, \quad \dots, \quad -a_l^2 \equiv \pm a.$$

Dans ce cas, aucun des nombres $a_1, a_2, a_3, \dots$ ne sera associé d'aucun autre nombre de cette suite. C'est évident, car en prenant deux termes quelconques de cette suite

$$a_i \equiv -g^{2^i k}, \quad a_j \equiv -g^{2^j k},$$

et en les multipliant, on aura

$$a_i a_j \equiv g^{(2^i + 2^j)k}.$$

Comme k est premier avec $(m-1)$, le produit $(2^i + 2^j)k$ ne peut pas être égal à $m-1 \equiv 0$, et par conséquent la congruence a_i et $a_j \equiv g^{m-1} \equiv 1$ est impossible. Donc, les termes a_i et a_j ne peuvent pas être associés entre eux. Soit b l'associé de a . Formons sa suite

$$-b^2 \equiv b_1, \quad -b_1^2 \equiv b_2, \quad -b_2^2 \equiv b_3, \quad \dots, \quad -b_l^2 \equiv \pm b.$$

Ces nombres $b_1, b_2, b_3, \dots$ seront respectivement associés de $a_1, a_2, a_3, \dots$. Donc les racines primitives sont toujours réparties entre une ou plusieurs paires de suites.

Éclaircissons ceci par un exemple. Soit $m = 43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$.

En commençant par n'importe quels nombres, on aura cinq suites :

$$\begin{aligned}
 \text{A.} \quad & 2.41 \equiv 39, \quad 39.4 \equiv 27, \quad 27.16 \equiv 2. \\
 \text{B.} \quad & 22.21 \equiv 32, \quad 32.11 \equiv 8, \quad 8.35 \equiv 22. \\
 \text{C.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} 3.40 \equiv 34, \quad 34.9 \equiv 5, \quad 5.38 \equiv 18, \\ 18.25 \equiv 20, \quad 20.23 \equiv 30, \quad 30.13 \equiv 3. \end{array} \right. \\
 \text{D.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} 29.14 \equiv 19, \quad 19.24 \equiv 26, \quad 26.17 \equiv 12, \\ 12.31 \equiv 28, \quad 28.15 \equiv 33, \quad 33.10 \equiv 29. \end{array} \right. \\
 \text{E.} \quad & 6.37 \equiv 8, \quad 7.36 \equiv 37.
 \end{aligned}$$

Comme 43 a 12 racines primitives, il est clair qu'elles forment les suites C et D et sont

$$34, 5, 18, 20, 30, 3; \quad 19, 26, 12, 28, 33, 39.$$

Pour $m = 211 = 2.3.5.7 + 1$, il y a 48 racines primitives, qui se répartissent entre quatre suites de 12 produits. Mais ce procédé est moins expéditif que le procédé général exposé plus haut.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Henri Fleury, présenté par MM. Delannoy et D. André; M. Lecornu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et L. Lévy; M. Gaston Martin et M. Amédée Wagner, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. Guyou : *Sur les équations du clapotis.*

M. Kœnigs : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Kœnigs : *Sur les aires des podaires d'une courbe fermée convexe et de sa développée, prises par rapport au même point.*

M. Humbert : *Sur les surfaces représentables point par point sur le plan.*

M. Humbert : *Sur les courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques.*

M. TOUCHE fait la Communication suivante :

Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique.

Pour établir l'équation de continuité en Hydraulique, on considère un petit parallélépipède rectangle MCFBAEGD dont le sommet est M.

Soit v_1 la vitesse en M de la trajectoire fluide qui passe par ce point à l'instant t . Appelons P le plan osculateur de cette trajectoire et P' un plan perpendiculaire au plan P et passant par le premier élément de trajectoire.

Appelons s une longueur de trajectoire comptée à partir du point M, s' une longueur comptée à partir du même point, sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et tangente à leurs plans osculateurs, s'' une longueur comptée sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et normale à leurs plans osculateurs; ds sera un élément de trajectoire, ds' un élément de normale principale à la trajectoire et ds'' un élément de binormale.

Soient a, a', a'' les cosinus directeurs de ds ; b, b', b'' ceux de ds' , et c, c', c'' ceux de ds'' .

Nous nous proposons de développer les trois derniers termes de l'équation de continuité. Pour cela, nous commençons par y remplacer u, v et w par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a'' . Pour développer le premier terme du trinôme ainsi obtenu, nous considérons le plan P qui contient l'élément ds ; nous abaïssons, du sommet A du petit parallélépipède, une perpendiculaire sur le plan P. Du pied de cette perpendiculaire, nous abaïssons dans le plan P une perpendiculaire sur ds . Nous faisons une transformation de coordonnées; nous avons les axes coordonnés suivant MA, MB, MC; après la transformation, nous les avons suivant ds, ds' et ds'' . Alors, en remarquant que l'on a $\frac{ds}{dx} = a, \frac{ds'}{dx} = b, \frac{ds''}{dx} = c$, nous obtenons

$$a^2 v_1 \frac{d^2}{ds} + ab v_1 \frac{d^2}{ds'} + ac v_1 \frac{d^2}{ds''}$$

pour la dérivée de $\varphi a v_1$ par rapport à x en ne faisant varier que φ . Nous obtenons de même la dérivée de $\varphi a v_1$ par rapport à x en ne

faisant varier que c_1 , puis sa dérivée en ne faisant varier que a . Cette dernière dérivée contient $\frac{da}{ds'}$ et $\frac{da}{ds''}$ que nous allons remplacer par d'autres quantités.

A partir du point M, considérons l'élément ds' ; au point M l'élément de trajectoire est ds ; soit $d\sigma$ l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de ds' ; projetons ce dernier élément sur le plan P; appelons $\delta\alpha$ l'angle formé par cette projection avec l'élément ds et $\delta\beta$ l'angle formé par l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan P.

A partir du même point M, considérons l'élément ds'' ; au point M l'élément de trajectoire est ds ; soit $d\sigma'$ l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de ds'' ; projetons ce dernier élément sur le plan P'; appelons $\delta'\alpha$ l'angle formé par cette projection avec l'élément ds et $\delta'\beta'$ l'angle formé par l'élément $d\sigma'$ avec sa projection sur le plan P'.

La considération de triangles sphériques nous donne

$$\begin{aligned}\frac{da}{ds'} &= -b \frac{\delta\alpha}{ds'} - c \frac{\delta\beta}{ds'}, \\ \frac{da}{ds''} &= -c \frac{\delta'\alpha}{ds''} - b \frac{\delta'\beta'}{ds''}.\end{aligned}$$

Nous remplaçons $\frac{da}{ds'}$ et $\frac{da}{ds''}$ par ces valeurs dans la dernière dérivée partielle considérée.

Pour développer le deuxième terme du trinôme, nous considérons toujours le plan P qui contient l'élément ds ; mais, au lieu de considérer, comme précédemment, le sommet A du petit parallélépipède, nous considérons le sommet B. De ce sommet, nous abaissons une perpendiculaire sur le plan P; du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur l'élément ds . A la suite d'un changement d'axes coordonnés, nous obtenons la dérivée de $\varphi a' c_1$ par rapport à y , en faisant varier successivement φ , c_1 et a' ; la dérivée partielle par rapport à a' contient $\frac{da'}{ds'}$ et $\frac{da'}{ds''}$ que nous remplaçons par des fonctions de $\frac{\delta\alpha}{ds'}$, $\frac{\delta'\alpha}{ds''}$, $\frac{\delta\beta}{ds'}$, $\frac{\delta'\beta'}{ds''}$ par la considération de triangles sphériques.

Pour développer le troisième terme, nous considérons le sommet C du petit parallélépipède.

Le développement du deuxième et celui du troisième peuvent s'obtenir au moyen de celui du premier, en y remplaçant $a, b, c, \frac{da}{ds}$ par $a', b', c', \frac{da'}{ds}$ pour le second et par $a'', b'', c'', \frac{da''}{ds}$ pour le troisième.

Le trinôme ainsi développé a trente-trois termes qui se réduisent à quatre et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + v_1 \frac{d\rho}{ds} + \rho \frac{dv_1}{ds} - \rho v_1 \frac{\partial z}{\partial s'} - \rho v_1 \frac{\partial' z}{\partial s''} = 0.$$

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité : M. Burkhardt, présenté par MM. J. Tannery et Kœnigs; M. Lancelin, présenté par MM. Laisant et Chailan.

Communications :

M. Fouret : *Sur le théorème des aires dans le mouvement d'un point matériel.*

M. Humbert : *Sur une surface du sixième ordre et sur la fonction thêta à plusieurs variables.*

M. DÉSIRÉ ANDRÉ communique le théorème suivant : *Sur le nombre des séquences dans les permutations des n premiers nombres.*

Si l'on désigne par σ_n la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, le rapport $\frac{\sigma_n}{n^2}$ a pour limite, lorsque n croît indéfiniment, la fraction $\frac{4}{9}$, c'est-à-dire le carré de la limite du rapport $\frac{s_n}{n}$, où s_n est la valeur moyenne des nombres de séquences.

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

Sur les systèmes collinéaires.

1. Étant données deux ponctuelles superposées projectives u

et u_1 , au point M de u correspond le point M_1 de u_1 ; au point M_1 de u_1 correspond le point M_2 de u_2 ; et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite indéfinie de points $M, M_1, M_2, \dots, M_i$.

M. Émile Weyr a démontré que, lorsque i augmente indéfiniment, le point M_i a pour limite un des points doubles des deux ponctuelles, à la condition que ces points soient réels.

Ce théorème s'étend évidemment aux autres formes de première espèce et, plus généralement, à deux formes élémentaires quelconques supposées et projectives.

Je me propose dans cette Note de l'étendre aux formes projectives de deuxième et de troisième espèce.

2. Soient Σ et Σ_1 deux systèmes plans supposés et collinéaires; ces deux systèmes ont trois points doubles, E, F, G , que nous supposerons réels. Les points homologues des deux plans sur la droite EF forment deux ponctuelles projectives dont les éléments doubles sont les points E et F ; ces ponctuelles seront parfaitement déterminées si nous nous donnons la quantité λ'' , valeur constante du rapport anharmonique formé par les points E et F et par deux points de cette droite, homologues dans les deux systèmes plans Σ et Σ_1 . Les quantités λ et λ' déterminent de la même façon les deux ponctuelles homologues situées sur les côtés FG et GE du triangle EFG . Ces trois quantités ne sont pas arbitraires; elles sont liées par la relation nécessaire

$$\lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Si le triangle EFG est donné, ainsi que deux des quantités λ, λ' et λ'' par exemple, la collinéation des deux systèmes plans sera parfaitement déterminée. Soit M , en effet, un point quelconque de Σ ; joignons FM et GM qui coupent respectivement les droites GE et EF aux points φ et γ ; déterminons sur ces mêmes droites deux points φ_1 et γ_1 , par les égalités anharmoniques

$$(1) \quad (GE\varphi\varphi_1) = \lambda'.$$

$$(2) \quad (EF\gamma\gamma_1) = \lambda''.$$

Le point M_1 , commun aux droites $F\varphi_1$ et $G\gamma_1$ sera évidemment l'homologue de M dans le système Σ_1 .

Ceci posé, supposons qu'au point M_i de Σ corresponde le point M_2 de Σ_1 ; au point M_2 de Σ , le point M_3 de Σ_1 ; et ainsi de suite. On obtient, par ces opérations successives, une suite indéfinie de points $M, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$. Proposons-nous de déterminer la position limite du point M_i , lorsque i augmente indéfiniment. Les droites FM_i et GM_i coupant respectivement les côtés GE et EF aux points φ_i et γ_i , nous avons les relations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} (GE \varphi_1) = \lambda', \\ (GE \varphi_1 \varphi_2) = \lambda', \\ \dots\dots\dots \\ (GE \varphi_{i-1} \varphi_i) = \lambda'. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} (EF \gamma_1) = \lambda'', \\ (EF \gamma_1 \gamma_2) = \lambda'', \\ \dots\dots\dots \\ (EF \gamma_{i-1} \gamma_i) = \lambda''. \end{cases}$$

Multiplions membre à membre toutes les égalités (3) et toutes les égalités (4); nous obtenons ainsi les deux relations suivantes :

$$(GE \varphi_i) = \lambda'^i, \quad (EF \gamma_i) = \lambda''^i.$$

Supposons que les deux quantités λ' et λ'' soient différentes de l'unité; plusieurs cas peuvent alors se présenter.

Premier cas : $\lambda' > 1, \lambda'' > 1$. Les deux quantités λ'^i et λ''^i augmentent indéfiniment avec i , les points φ_i et γ_i tendent respectivement vers les points E et F ; le point M_i a alors le point F comme limite.

Deuxième cas : $\lambda' < 1, \lambda'' < 1$. Les quantités λ'^i et λ''^i tendent vers zéro; les points φ_i et γ_i ayant alors pour positions limites les points G et E , le point M_i tend vers le point G .

Troisième cas : $\lambda' > 1, \lambda'' < 1$. Alors φ_i et γ_i tendant vers le même point E , ce point est aussi la limite du point M_i .

Quatrième cas : $\lambda' < 1, \lambda'' > 1$. Dans ce cas, le point M_i tendra vers l'un des deux points G ou F , suivant que λ sera plus grand ou plus petit que 1.

Si $\lambda = 1$, on voit immédiatement que les deux systèmes plans Σ et Σ_1 sont homologiques; le point E étant le centre, et FG l'axe

d'homologie. La position limite du point M est alors, suivant la valeur de λ' , soit le point E , soit le point d'intersection ε de EM avec FG . Un cas particulier correspond aux valeurs $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$, $\lambda'' = -1$; les deux systèmes homologues sont alors en involution, et, deux points homologues M et M_1 se correspondant doublement, la suite indéfinie des points M_i se compose de ces deux points se reproduisant périodiquement.

Enfin il est impossible que deux des quantités λ , λ' et λ'' soient égales à 1; car les deux systèmes Σ et Σ_1 coïncideraient dans leur ensemble.

Nous voyons, en résumé, que, si le triangle des points doubles est réel, le point M_i tend toujours vers l'un des sommets de ce triangle.

Ce théorème s'étend immédiatement aux autres formes de seconde espèce, par exemple à deux gerbes concentriques collinéaires, et aux cordes d'une même cubique gauche se correspondant homographiquement.

3. Le théorème analogue pour la forme fondamentale de troisième espèce se démontrerait de la même façon que dans le paragraphe 2. Nous en donnerons seulement l'énoncé : *Soient deux espaces collinéaires Σ et Σ_1 ayant leurs quatre points doubles réels et formant un tétraèdre $EFGH$. Au point M de Σ correspond un point M_1 de Σ_1 ; au point M_1 de Σ correspond un point M_2 de Σ_1 ; et ainsi de suite. On forme ainsi une série indéfinie de points $M, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$. Le point M_i tend, lorsque i augmente indéfiniment, vers l'un des sommets du tétraèdre $EFGH$.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur des couples de surfaces applicables;

par M. TH. CARONNET.

1. Étant données deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la distance M_1M_2 des points correspondants varie en général avec la position de ces points sur les surfaces qu'ils décrivent.

Nous nous sommes demandé s'il existait des couples de surfaces applicables pour lesquelles cette distance fût constante. La solution de cette question, que nous donnons ici, montre que notre hypothèse était plausible; il existe, en effet, des surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance M_1M_2 de deux points correspondants est invariable.

Ces surfaces peuvent se diviser en deux groupes. Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une surface du premier groupe dépendent de deux fonctions arbitraires d'arguments différents.

Les surfaces du second groupe sont réglées et se correspondent par génératrices parallèles et de même sens; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même argument.

Au point de vue de la déformation, ce dernier résultat n'est pas nouveau; M. Beltrami a montré effectivement qu'il existe toujours deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre et dans lesquelles les génératrices correspondantes sont parallèles et de même sens ⁽¹⁾.

2. Soient deux surfaces (M_1) , (M_2) applicables l'une sur l'autre et telles que la distance M_1M_2 des points correspondants soit constante et égale à l .

Appelons $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ les coordonnées des points M_1, M_2 ; x, y, z celles du milieu O de la droite qui les joint, et ξ, η, ζ les cosinus directeurs de cette droite.

Nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} x_1, y_1, z_1 = x, y, z + (\xi, \eta, \zeta) \frac{l}{2}, \\ x_2, y_2, z_2 = x, y, z - (\xi, \eta, \zeta) \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Les deux surfaces en question étant applicables l'une sur l'autre, il vient

$$\sum dx_1^2 = \sum dx_2^2,$$

ou bien

$$(2) \quad \sum dx d\xi = 0.$$

⁽¹⁾ Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Troisième Partie, p. 298.

Par conséquent, la surface lieu du milieu O correspond à la sphère par orthogonalité des éléments; et, après avoir posé

$$\xi = \frac{x - \beta}{1 + x\beta}, \quad \eta = i \frac{x - \beta}{1 + x\beta}, \quad \zeta = \frac{1 - x\beta}{1 + x\beta},$$

nous aurons

$$(3) \quad S \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

$$(4) \quad S \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

$$(5) \quad S \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + S \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial z} = 0.$$

Les équations (3) et (4) s'écrivent encore

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial x}{\partial x} + i(1 + \beta^2) \frac{\partial y}{\partial x} - 2\beta \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$(1 - x^2) \frac{\partial x}{\partial \beta} - i(1 + x^2) \frac{\partial y}{\partial \beta} - 2x \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

et nous donnent après intégration

$$(3)' \quad (1 - \beta^2)x + i(1 + \beta^2)y - 2\beta z = B(\beta),$$

$$(4)' \quad (1 - x^2)x - i(1 + x^2)y - 2xz = A(x).$$

Quant à l'équation (5), on peut l'écrire

$$S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \beta} x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} S x \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} S x \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

ou bien, en tenant compte des équations (3)' et (4)' qui permettent d'exprimer le second membre exclusivement en fonction de x et de β ,

$$(5)' \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - \beta)x + i(\beta - x)y - (1 - x\beta)z \\ = \frac{(1 + x\beta)}{4} (A' + B') - \frac{\beta}{2} A - \frac{x}{2} B. \end{array} \right.$$

Les coordonnées x , y , z de tout point de la surface (O) seront donc fournies par les trois équations linéaires (3)', (4)' et (5)'.

Les formules (1) feront connaître ensuite les surfaces (M_1) et (M_2).

La recherche des surfaces focales de la congruence rectiligne

($M_1 M_2$) présente quelque intérêt. Examinons donc comment sont distribués les points focaux sur la droite $M_1 M_2$.

Nous avons pour les coordonnées d'un point quelconque de la droite $M_1 M_2$

$$X, Y, Z = x, y, z + (\xi, \eta, \zeta)\rho.$$

Les développables de la congruence sont définies par l'équation qu'on obtient en éliminant ρ entre les équations

$$\frac{dx + \rho \frac{d\xi}{\xi}}{\xi} = \frac{dy + \rho \frac{d\eta}{\eta}}{\eta} = \frac{dz + \rho \frac{d\zeta}{\zeta}}{\zeta},$$

ce qui donne, en ayant égard à l'identité (2),

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0$$

ou

$$dx \, d\beta = 0.$$

Les développables en question correspondent donc aux génératrices rectilignes de la sphère, et nous avons pour les ρ des points focaux

$$\rho_1 = - \frac{\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}{\sum \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}, \quad \rho_2 = - \frac{\sum \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}}{\sum \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}.$$

L'équation (5) nous montre d'ailleurs que l'on a

$$\rho_2 = - \rho_1;$$

par conséquent, les points focaux sont équidistants du milieu O.

3. Dans l'analyse précédente, nous avons supposé dès le début, en partant de l'identité (2), que les droites $M_1 M_2$ étaient susceptibles d'avoir une direction quelconque, c'est-à-dire que le point (ξ, η, ζ) pouvait occuper toute position sur la sphère de rayon unité; il convient maintenant d'étudier le cas où ce point décrit seulement une courbe sphérique $\beta = f(\alpha)$. La surface (O) qui correspond à cette courbe par orthogonalité des éléments sera nécessairement une développable.

D'ailleurs, l'équation (2) nous donne

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \beta' \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} &= 0, \end{aligned}$$

et, en reprenant le calcul indiqué plus haut pour la recherche des développables de la congruence $(M_1 M_2)$, on voit que les développables d'une famille sont données par $\beta = \text{const.}$ Elles correspondent donc aux génératrices de la développable (O) . On reconnaît en outre aisément que les points focaux relatifs à ces développables coïncident avec les milieux O des segments $M_1 M_2$.

Pour achever la question, considérons la surface (O) et rapportons-la aux courbes enveloppes ($v = \text{const.}$) des droites $M_1 M_2$, et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$). Son élément linéaire sera de la forme

$$(6) \quad ds^2 = \Lambda^2 du^2 + C^2 dv^2.$$

Les coordonnées des points M_1 et M_2 s'écriront

$$(M_1) \quad x_1, y_1, z_1 = x, y, z + \frac{l}{2\Lambda} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u},$$

$$(M_2) \quad x_2, y_2, z_2 = x, y, z - \frac{l}{2\Lambda} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u}.$$

D'après l'hypothèse, les surfaces (M_1) , (M_2) étant applicables l'une sur l'autre, nous devons avoir l'identité

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2,$$

qui s'écrit, après substitutions,

$$\sum dx d\left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0.$$

Développons et annulons les coefficients de du^2 , de $du dv$ et de dv^2 ; nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ou finalement, après réductions,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial u} = 0.$$

Par conséquent, l'élément linéaire (6) pourra s'écrire

$$(7) \quad ds^2 = du^2 + dv^2.$$

La surface focale (O) est donc une développable, comme nous l'indiquions plus haut, et les développables de la congruence (M₁M₂) sont constituées par les plans tangents d'une part et les tangentes aux géodésiques $v = \text{const.}$ de cette surface d'autre part.

Remarquons que ces géodésiques coupent une même génératrice (g) de la surface (O) suivant le même angle; quand le point milieu (O) décrira la droite (g), les points M₁ et M₂ décriront dans le même sens deux droites (G₁) et (G₂) parallèles à (g) et équidistantes de cette dernière.

Il suit de là que les surfaces (M₁) et (M₂) sont réglées, qu'elles se correspondent par génératrices parallèles et de même sens.

Mais, comme le fait prévoir leur mode de génération, les surfaces réglées (M₁) et (M₂) ne sont pas quelconques; pour plus de précision, nous allons calculer les expressions de leurs coordonnées rectangulaires.

Soient

$$x = a_1 u + b_1,$$

$$y = a_2 u + b_2,$$

$$z = a_3 u + b_3$$

les coordonnées d'un point quelconque de la développable (O).

Nous pouvons toujours supposer

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$

$$a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = 1,$$

$$a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' = 0;$$

et la surface étant développable, nous aurons

$$\frac{a_1'}{b_1'} = \frac{a_2'}{b_2'} = \frac{a_3'}{b_3'} = \frac{1}{x}.$$

Pour ramener l'élément linéaire de la surface (O) à la forme (7)

il faut effectuer les substitutions suivantes :

$$u' = u \cos(v + m) + \int x \sin(v + m) dv,$$

$$v' = u \sin(v + m) - \int x \cos(v + m) dv,$$

où m désigne une constante arbitraire.

Ceci posé, nous aurons pour les coordonnées du point M_1

$$x_1 = a_1 u + b_1 + \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$y_1 = a_2 u + b_2 + \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$z_1 = a_3 u + b_3 + \frac{\partial z}{\partial u},$$

ou bien

$$(M_1) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 u + b_1 + \frac{l}{2} [a_1 \cos(v + m) - a'_1 \sin(v + m)], \\ y_1 = a_2 u + b_2 + \frac{l}{2} [a_2 \cos(v + m) - a'_2 \sin(v + m)], \\ z_1 = a_3 u + b_3 + \frac{l}{2} [a_3 \cos(v + m) - a'_3 \sin(v + m)]. \end{cases}$$

Les coordonnées du point M_2 s'obtiendront en changeant l en $-l$ dans les expressions des coordonnées de M_1 .

Les surfaces réglées (M_1) et (M_2) dépendent donc des deux fonctions arbitraires qui définissent la développable (O) .

Sur les équations du clapotis; par M. E. Geyou.

Le seul mouvement oscillatoire des liquides dont on connaisse exactement les lois est celui de la *houle* dans des eaux de profondeur infinie. Je me propose de montrer que l'on peut exprimer également celles du mouvement connu sous le nom de *clapotis*.

M. Boussinesq a étudié ce phénomène dans le cas où la hauteur des ondes est petite relativement à leur longueur, et a donné des équations qui satisfont à une grande approximation à la condition de continuité et à celle de la surface libre.

Dans le mouvement exprimé par ces équations, de même que

dans la houle, les molécules appartenant à une même couche horizontale d'équilibre sont réparties à chaque instant sur le contour d'une trochoïde d'autant plus aplatie que la couche est plus profonde, et celles qui appartiennent à une même ligne verticale sont situées à l'extrémité de rayons parallèles des cercles générateurs.

Dans la houle, chaque molécule décrit son cercle d'un mouvement uniforme, de sorte que les ondes trochoïdales conservent la même forme et se transportent avec une vitesse constante.

Dans le clapotis, le rayon sur lequel se trouve chaque molécule reste parallèle à lui-même, et la molécule est animée sur sa direction d'un mouvement pendulaire. Il en résulte que, dans une demi-période, les couches de même profondeur prennent la forme de trochoïdes de plus en plus aplaties jusqu'à la forme rectiligne, et, dans la demi-période suivante, les trochoïdes se renversent, présentant leurs crêtes aux points où se trouvaient précédemment les creux et réciproquement. Chacune d'elles subit ainsi des déformations périodiques offrant une grande analogie avec celles des cordes vibrantes.

Les rayons sur lesquels oscillent les molécules ne restent pas immobiles. Il faut, en effet, que chaque trochoïde limite au-dessous d'elle un volume constant, et, par suite, que le centre du cercle générateur reste situé au-dessus de la couche de repos à une hauteur égale au quotient de la surface du cercle par la longueur de l'onde, c'est-à-dire à une hauteur proportionnelle au carré du rayon. Il résulte de là que, par rapport à des axes ayant pour origine la position de repos, et dirigés l'un verticalement et l'autre parallèlement au rayon de la molécule considérée, l'abscisse, c'est-à-dire le rayon, est proportionnelle à la racine carrée de l'ordonnée : la trajectoire est donc une parabole dont l'axe est vertical.

Ces résultats sont conformes à ceux qu'a obtenus M. Marey, par sa méthode chronophotographique, dans les expériences remarquables signalées à l'Académie le 1^{er} mai 1893.

L'accord entre les résultats de M. Boussinesq et ceux de l'expérience est si frappant qu'il était vraisemblable qu'une très petite modification aux lois données suffirait pour les amener à satisfaire rigoureusement aux conditions du problème. On y arrive, en effet,

en substituant une fonction elliptique à la fonction circulaire qui exprime le mouvement oscillatoire des molécules sur leurs rayons respectifs. Traduit géométriquement, le mouvement rectiligne, au lieu d'être celui de la projection d'un point qui décrit un cercle uniformément, est celui d'un point qui décrit le contour d'une ellipse avec une vitesse linéaire constante.

Si l'on désigne par X et Y les coordonnées horizontale et verticale de la position de repos d'une molécule, et par x et y celles de la position à un instant donné, dans le phénomène de la houle, on a les relations

$$(1) \quad \begin{cases} x = X + r \sin \frac{2\pi}{L} X, \\ y = Y + r \cos \frac{2\pi}{L} X - \frac{\pi r^2}{L}. \end{cases}$$

L représente la longueur des ondes, r le rayon orbitaire correspondant à la profondeur Y ; celle-ci est mesurée à partir de la surface libre de repos. Enfin la valeur de r dépend du rayon R correspondant à la surface libre; la loi de cette dépendance s'exprime au moyen d'une variable auxiliaire z par les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} r = R e^{-\frac{2\pi}{L} z}, \\ z = Y + \frac{\pi R^2}{L} - \frac{\pi r^2}{L}, \end{cases}$$

où z représente la distance du centre orbitaire de la molécule considérée au centre orbitaire de la molécule superficielle appartenant à la même ligne verticale.

Il est facile de s'assurer que, dans la déformation résultant du passage des molécules des positions X, Y aux positions x, y , les éléments correspondants conservent la même surface, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dx}{dX} \frac{dy}{dY} - \frac{dx}{dY} \frac{dy}{dX} = 1,$$

et cela quelle que soit la valeur de R .

Par suite, on peut, dans le système d'équations (1) et (2), supposer que R est une fonction périodique arbitraire du temps sans que cette propriété cesse de subsister, et l'on aura ainsi un mou-

vement oscillatoire dans lequel la condition de continuité sera sans cesse vérifiée. Il ne reste donc plus qu'à choisir cette fonction telle que la surface libre reste surface de niveau, c'est-à-dire telle que la résultante de la pesanteur et de la force d'inertie des molécules superficielles soit normale à la surface libre.

Cette condition est exprimée par l'équation

$$\frac{dx}{dX} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dX} \left(g - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0,$$

les dérivées partielles étant prises pour la surface libre.

Or le mouvement des molécules superficielles est exprimé par les équations

$$x = X + R \sin \frac{2\pi}{L} X,$$

$$y = R \cos \frac{2\pi}{L} X - \frac{\pi R^2}{L},$$

dans lesquelles R est seul fonction du temps.

On obtient en effectuant les calculs

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + g \frac{2\pi R}{L} + \frac{4\pi^2}{L^2} \left(R \frac{dR^2}{dt^2} + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right) = 0.$$

En multipliant par $2 \frac{dR}{dt}$, on obtient par une première intégration

$$\frac{dR^2}{dt^2} + \frac{2\pi g}{L} R^2 + \frac{4\pi^2}{L^2} R^2 \frac{dR^2}{dt^2} = \text{const.}$$

Si l'on désigne par a la valeur maxima de R dans le mouvement, on doit avoir $R = a$ pour $\frac{dR}{dt} = 0$; par suite, la constante est

$$= \frac{2\pi g a^2}{L},$$

et il vient

$$\frac{dR^2}{dt^2} + \frac{2\pi g}{L} (R^2 - a^2) + \frac{4\pi^2}{L^2} R^2 \frac{dR^2}{dt^2} = 0.$$

En posant

$$(3) \quad R = a \cos \varphi$$

et substituant, on trouve finalement

$$(4) \quad d\varphi \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 a^2}{L^2} \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{2\pi g}{L}} dt.$$

Par suite, les équations (1), (2), (3), (4) définissent un mouvement qui satisfait aux conditions cinématiques et dynamiques du problème.

En désignant par ρ le rayon du cercle dont le développement est égal à L , l'équation (4) devient

$$(5) \quad d\varphi \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{g}{\rho}} dt.$$

Considérons actuellement a comme le petit axe d'une ellipse ayant pour grand axe

$$a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2}}.$$

Les coordonnées d'un point de cette ellipse peuvent être exprimées par

$$a \cos \varphi, \quad a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2}} \sin \varphi;$$

le petit arc d'ellipse correspondant à $d\varphi$ a pour valeur

$$\begin{aligned} ds &= a \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= a \sqrt{1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

On a donc, d'après l'équation (5),

$$ds = a \sqrt{\frac{g}{\rho}} dt.$$

Par suite, le mouvement oscillatoire est celui de la projection sur le petit axe d'un point décrivant, avec une vitesse linéaire constante, le contour de cette ellipse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Laisant : *Un théorème général de Mécanique.*

M. Lancelin : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. d'Ocagne : *Un abaque général de la Trigonométrie sphérique.*

M. Carvallo : *Un théorème général de Statique.*

M. Fourret : *Sur le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force qui rencontre constamment deux droites fixes.*

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

Sur un théorème de Laguerre.

Laguerre a proposé dans les *Nouvelles Annales* (QUESTION n° 1484) le problème suivant :

On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie d'une division homographique. Sur ab comme diamètre on décrit un cycle C dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b ; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles C' et C'' . Si l'on trace un cycle tangent à C, C' et C'' , démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles de la division homographique.

M. Laisant, dans son *Recueil de problèmes de Mathématiques*, reproduit cette même question comme n'ayant reçu aucune solution. Je me propose, dans cette Note, de démontrer élémentairement la propriété énoncée.

Soient u la droite donnée et e, f les deux points doubles des divisions homographiques déterminées par les trois couples de

points correspondants (a, b) , (a', b') et (a'', b'') . D'après une propriété connue, ces deux points e et f sont des points conjugués de l'involution I'' définie par les deux couples de points conjugués (a, b') et (b, a') . Ces points forment également un couple dans l'involution I' déterminée par les deux couples de points (a, b'') et (b, a'') . Pour construire les points doubles des deux divisions homographiques données, il suffit donc, d'après cette remarque, de déterminer le couple de points conjugués commun aux deux involutions I' et I'' . Ceci posé, le point central de l'involution I' est un point S' de la droite u déterminé par la relation métrique

$$S'aS'b'' = S'bS'a''.$$

Ce point S' est, d'après cette égalité, le centre de similitude des deux cycles C et C'' . Il s'ensuit que par un couple quelconque de points de l'involution I' on pourra faire passer un cycle tangent aux deux cycles C et C'' . Le point central de l'involution I'' étant de même le point S'' , centre de similitude des deux cycles C et C' , on pourra, par un couple de points de cette involution, mener un cycle tangent à C et à C' . Or, comme nous l'avons vu plus haut, les points e et f forment un couple de points conjugués commun aux deux involutions considérées. Il suit de là que, si par ces deux points nous menons un cycle Γ tangent au cycle C par exemple, ce cycle Γ sera également tangent à C' et à C'' . Les points doubles des deux divisions homographiques données s'obtiendront donc en prenant l'intersection de la droite u avec un des deux cycles Γ tangents aux trois cycles C , C' et C'' . Les deux cycles Γ que l'on peut ainsi construire sont symétriques par rapport à la droite u et la coupent aux deux mêmes points.

M. S. MANGEOT adresse la Communication suivante :

Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique.

On peut se demander quelles sont les surfaces U qui admettent toutes les surfaces de symétrie V d'une quadrique donnée W .

Le lieu des symétriques d'un point pris sur une surface U par rapport à toutes les surfaces V est une surface qui doit avoir une partie commune avec U . D'un autre côté, ce lieu est l'une des quadriques homothétiques et concentriques à W , car celles-ci

sont symétriques aussi par rapport aux surfaces V : donc la surface U est formée par une ou plusieurs de ces quadriques. Ainsi il n'existe pas d'autres surfaces ayant toutes les surfaces de symétrie d'une quadrique que les quadriques concentriques et homothétiques à celle-ci.

D'après les formules que j'ai fait connaître ⁽¹⁾ pour la détermination des surfaces de symétrie des quadriques, ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Les seules surfaces qui soient symétriques par rapport à chacune des surfaces de l'une des classes

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x^a}{z^c}, \frac{y^b}{z^c}\right) &= 0, & \varphi\left(\frac{x^a}{e^z}, \frac{y^b}{e^z}\right) &= 0, \\ \varphi\left(x, \frac{y^b}{z^c}\right) &= 0, & \varphi\left(x, \frac{y^b}{e^z}\right) &= 0 \end{aligned}$$

sont respectivement les quadriques

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= \lambda, & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z &= \lambda, \\ \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= \lambda, & \frac{y^2}{b} + 2z &= \lambda; \end{aligned}$$

a, b, c désignant trois nombres donnés, λ un paramètre et φ une fonction arbitraire.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Raffy : *Sur certaines fonctions analytiques d'une variable complexe.*

M. Fouret : *Sur un mode de génération du complexe linéaire.*

⁽¹⁾ Thèse de doctorat. Gauthier-Villars, 1890.

M. Touche : *Du mouvement relatif des corps plongés dans un fluide.*

M. Antomari : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre réductibles à la forme linéaire.*

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce.

1. Soient deux ponctuelles projectives et superposées u, u_1 , dont les points doubles sont e et f . Formons la suite des points $m, m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$, telle que m_i est le point de u_1 homologue du point m_{i-1} de u . Nous savons que si les points e et f sont imaginaires conjugués, et le rapport anharmonique $(efmm_1)$ égal à une racine imaginaire $n^{\text{ième}}$ de l'unité, la suite (m) obtenue sera périodique de n en n ; M. Clebsch définit une telle suite sous le nom de *suite cyclo-projective* d'ordre n . Nous nous proposons, dans cette Communication, de rechercher s'il existe et si l'on peut construire des systèmes périodiques analogues dans les formes de deuxième espèce.

2. Soient donc deux systèmes plans collinéaires Σ et Σ_1 dont les points doubles forment le triangle efg . Formons la suite projective des points m_i telle que m_i est le point de Σ_1 homologue du point m_{i-1} de Σ , et désignons, pour abréger, par (m) la série de points ainsi obtenue, en partant du point initial m . Supposons que nous projetions sur un même plan les systèmes Σ et Σ_1 , en F et F_1 , de telle façon que les projections des points f et g soient les points cycliques de ce plan. Les deux systèmes F et F_1 sont alors semblables et le point e est projeté au centre de similitude ω de ces deux figures. Si μ_i est la projection du point m_i , on reconnaît facilement que ce point s'obtient en construisant sur $\omega\mu_{i-1}$ un triangle semblable à un triangle donné. On a donc la relation angulaire

$$\widehat{\mu_{i-1} \omega \mu_i} = \alpha$$

et la relation métrique

$$\omega \mu_i = a \omega \mu_{i-1},$$

a et α étant des quantités données.

3. Nous supposons d'abord que α est une quantité différente de l'unité. Tous les points μ_i obtenus en partant du point initial μ , forment la suite (μ) , projection de la suite (m) , et sont évidemment situés sur une même spirale logarithmique ayant le point O pour pôle.

Nous en déduisons donc, par projection, que les points de la suite (m) sont situés, en général, sur une courbe transcendante S, projection de la spirale logarithmique, et admettant, par conséquent, les trois points e, f, g comme points asymptotiques. La spirale logarithmique coupant tous les rayons vecteurs issus du pôle sous un angle constant, la courbe S peut se définir de la façon suivante : elle est telle que si p est un de ces points et pt la tangente correspondante, le rapport anharmonique $p(efgt)$ est constant et égal à k , lorsque le point p se déplace sur la courbe. Chaque suite (m) détermine une courbe S; toutes les courbes correspondantes aux différentes positions initiales du point m et pour lesquelles k a la même valeur forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = 1$, $\nu = 1$ et qui est défini par une équation différentielle de Jacobi, admettant le triangle efg comme triangle fondamental. Toutes ces courbes sont, du reste, les seules qui se transforment en elles-mêmes dans la collinéation des deux systèmes plans Σ et Σ_1 , c'est-à-dire qu'elles sont anallagmatiques dans cette transformation.

4. Supposons maintenant $\alpha = 1$, l'angle α restant toujours quelconque; les points (μ) sont alors situés sur le cercle C ayant ω pour centre et $\omega\mu$ pour rayon. Les points correspondants (m) sont donc situés sur une conique Γ_e tangente en f et g aux droites ef et eg ; ces points forment du reste sur Γ_e une suite projective de première espèce dont f et g sont les points doubles. Le système des courbes S se résout, dans ce cas, dans le faisceau des coniques Γ_e . Nous pourrions toujours, étant donnés le triangle efg et un point m de Σ , déterminer une triple infinité de points m , tels que les points de la suite (m) obtenue en partant des points initiaux m et m_1 soient situés sur une même conique; il suffira, en effet, de prendre le point m sur une des trois coniques des faisceaux $\Gamma_e, \Gamma_f, \Gamma_g$, passant par m . La collinéation des deux systèmes plans Σ et Σ_1 étant déterminée par le triangle efg et la correspondance

des points m et m_1 situés, par exemple, sur une conique du faisceau Γ_f ; si nous formons la suite (n) en partant d'un point initial absolument quelconque n , les points obtenus seront également tous situés sur une quelconque des coniques du faisceau Γ_f . Ce que nous venons de dire n'implique pas la réalité des trois points e, f, g ; nous pouvons supposer que le point e seul est réel, les deux autres étant imaginaires conjugués. Dans ce cas, la conique Γ_e est la seule réelle et constructible, les deux autres sont imaginaires.

5. Si $a = 1$, $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$, k étant un entier quelconque premier avec n , la suite (μ) correspondante est périodique de n en n , et les n points distincts ainsi obtenus sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle décrit du point ω comme centre avec $\omega\mu$ pour rayon. La suite (m) sera donc également périodique de n en n , et formera ce que nous appelons une suite cyclo-projective de deuxième espèce. Tous ces points sont du reste situés sur une conique Γ_e et y forment une suite cyclo-projective de première espèce dont f et g sont les points doubles; ceci exige tout d'abord, comme on le voit immédiatement, que les points f et g soient imaginaires conjugués. Nous pourrions toujours, étant donné le triangle efg , dont les deux sommets f et g sont imaginaires conjugués, et un point m de Σ , déterminer le point m_1 , homologue dans Σ_1 , de telle façon que la suite (m) obtenue en partant des points initiaux m et m_1 soit une suite cyclo-projective d'ordre n . Décrivons en effet la conique du faisceau Γ_e passant par m , et prenons sur cette courbe un point m_1 , tel que le rapport anharmonique $(fgmm_1)$ soit, sur la conique, égal à une racine imaginaire $n^{\text{ième}}$ de l'unité négative; un des points m_1 ainsi obtenus résoudra le problème.

La possibilité et la construction des suites cyclo-projectives de deuxième espèce sont donc parfaitement acquises et c'était là le but principal de cette Note. Nous rechercherons, dans une autre Communication, s'il existe des suites analogues pour les formes de troisième espèce.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Un théorème général de Mécanique; par M. C.-A. LAISANT.

La proposition dont il s'agit, et que je crois nouvelle, est une généralisation de celle des forces vives. En voici l'énoncé :

Soit un système matériel en mouvement depuis le temps t_0 jusqu'au temps t . Si m représente la masse d'un quelconque des points qui composent ce système; v_0 et v les vitesses de ce point au commencement et à la fin de la période considérée; F la force qui agit sur le point m ; F_1 une force de même direction appliquée au même point, mais dont la grandeur a pour expression $F \frac{f'(v)}{v}$, $f(v)$ étant une fonction arbitraire de la vitesse; si enfin T_1 représente le travail total des forces F_1 pendant la période considérée, l'accroissement de la fonction $\Sigma m f(v)$ sera égal au travail T_1 , c'est-à-dire qu'on aura

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = T_1.$$

La démonstration, calquée sur celle de la proposition des forces vives, est des plus simples. On a en effet, identiquement,

$$d f(v) = f'(v) dv = \frac{f'(v)}{v} \frac{ds}{dt} dv = \frac{f'(v)}{v} \frac{dv}{dt} ds,$$

ou, en multipliant par m ,

$$d[m f(v)] = m \frac{dv}{dt} \frac{f'(v)}{v} ds.$$

Or $m \frac{dv}{dt}$ représente la composante tangentielle de la force F .

Donc $m \frac{dv}{dt} \frac{f'(v)}{v}$ sera la composante tangentielle de la force

$$F_1 = F \frac{f'(v)}{v},$$

et, par conséquent, le second membre représente le travail élémentaire de cette force F_1 pendant le temps infiniment petit dt .

Si nous étendons la relation ci-dessus à tous les points qui

composent le système, nous aurons donc

$$d[\Sigma m f(v)] = dT_1,$$

c'est-à-dire la somme des travaux élémentaires de toutes les forces F_1 , et en intégrant de t_0 à t ,

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = T_1.$$

Nous examinerons maintenant plusieurs cas particuliers, remarquablement simples, auxquels s'applique ce théorème général, et qui dépendent du choix qu'on fait de la fonction arbitraire $f(v)$.

1° Soit $f(v) = v^2$; alors $\frac{f'(v)}{v} = 2$, $F_1 = 2F$, et l'on retombe sur le théorème des forces vives

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2T.$$

2° Soit $f(v) = v^n$; alors $\frac{f'(v)}{v} = n v^{n-2}$ et les forces F_1 ayant pour expression $n F v^{n-2}$, on a

$$\Sigma m v^n - \Sigma m v_0^n = T_1.$$

Par exemple, l'accroissement de la somme des quantités de mouvement est donnée par le travail des forces $\frac{F}{v}$.

3° Soient $f(v) = \log v$; alors $\frac{f'(v)}{v} = \frac{1}{v^2}$; $F_1 = \frac{F}{v^2}$; et le travail de ces forces F_1 donne la valeur de

$$\Sigma m \log v - \Sigma m \log v_0 = \Sigma m \log \frac{v}{v_0}.$$

4° Soient $f(v) = e^{\frac{v^2}{2}}$; alors $\frac{f'(v)}{v} = e^{\frac{v^2}{2}}$, $F_1 = F e^{\frac{v^2}{2}}$, c'est-à-dire que le coefficient par lequel il faut multiplier chaque force est précisément égal à la fonction considérée $f(v)$;

$$\Sigma m e^{\frac{v^2}{2}} - \Sigma m e^{\frac{v_0^2}{2}} = \text{travail des forces } F e^{\frac{v^2}{2}}.$$

Il semble que la proposition précédente peut être utile, en permettant d'obtenir dans certains cas une intégrale du mouvement que ne donnerait pas le théorème des forces vives.

Supposons par exemple que les forces qui agissent sur les points d'un système soient données par des expressions de la forme $F\varphi(v)$. Choisissons pour $f(v)$ la fonction $\int \frac{v dv}{\varphi(v)}$, en disposant d'ailleurs à volonté de la constante arbitraire. On aura

$$\frac{f'(v)}{v} = \frac{1}{\varphi(v)};$$

et les forces F_1 se réduiront aux forces F . Si ces dernières admettent une fonction des forces, et que l'équation des surfaces de niveau soit $\Phi(x, y, z) = k$, on aura

$$\Sigma m f(v) - \Sigma m f(v_0) = \Sigma [\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)],$$

alors que l'accroissement $\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2$ n'aurait pu être ainsi obtenu par une intégration pure et simple.

Prenons, comme cas particulier, l'hypothèse d'un système de points matériels sollicités vers un centre fixe par des forces qui sont à la fois proportionnelles à la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance r , et à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la vitesse.

L'expression de l'une de ces forces est $mkr^p v^n$. Posons

$$f(v) = \int v^{1-n} dv = \frac{1}{2-n} v^{2-n},$$

si $n \geq 2$, et

$$f(v) = \log v$$

si $n = 2$.

Nous aurons l'expression

$$\frac{1}{2-n} (\Sigma m v^{2-n} - \Sigma m v_0^{2-n})$$

dans le premier cas, et

$$\Sigma m \log v - \Sigma m \log v_0$$

dans le second, qui sera fournie par le travail des forces mkr^p , appliquées aux divers points du système et dirigées vers le centre d'attraction. Or, ce travail est fourni pour chaque point par l'intégrale

$$-\int kmr^p dr = \frac{km}{p+1} (r_0^{p+1} - r^{p+1}),$$

les surfaces de niveau étant des sphères dont le centre d'attraction est le centre commun.

Le travail pour tout le système est donc

$$\frac{k}{p+1} (\Sigma m r_0^{p+1} - \Sigma m r^{p+1}).$$

Il y a, bien entendu, exception pour le cas où $p = -1$, car l'intégrale est alors $km \log \frac{r_0}{r}$.

Si, en particulier, $n = 2$ et $p = -1$, c'est-à-dire pour des forces $mk \frac{v^2}{r}$, il vient

$$\Sigma m \log \frac{v}{v_0} = k \Sigma m \log \frac{r_0}{r}.$$

Cette relation, qui peut encore s'écrire

$$\Sigma \log \left(\frac{v r^k}{v_0 r_0^k} \right)^m = 0$$

et qui montre que pour chaque point du système la quantité $v r^k$ reste invariable pendant le mouvement, aurait d'ailleurs pu s'obtenir aisément d'une manière directe dans ce cas particulier.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXI.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	v
Liste des Sociétaires perpétuels.....	vi
État de la Société au commencement de l'année 1893.....	vii
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv
 M ¹ 2b. — Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes; par M. ÉMILE PICARD.....	 1
H 12d. — Sur les suites récurrentes; par M. D'OCAGNE.....	3
L ² 2, M ¹ 6i. — Sur une propriété des cônes du second ordre; par M. HUMBERT.....	3
R 2b. — Théorème sur le centre des moyennes distances; per M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.....	5
O 3j. — Sur une classe particulière de courbes gauches; par M. DEMOULIN.	8
L ¹ 20a. — Expression de quelques aires sur le paraboloidé elliptique; par M. HUMBERT.....	13
L ² 20a. — Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloidé elliptique; par M. HUMBERT.....	17
M ¹ 8e. — Sur les courbes de Lamé; par M. GODEFROY.....	20
S 4a. — Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques; par M. GUSTAVE CELLÉRIER.....	26
H 9d. — Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant $2m + 1$ fonctions arbitraires; par M. DEMOULIN.....	43
H 9e. — Sur une équation d'Euler; par M. RAFFY.....	44
M ¹ 5h, M ¹ 5a. — De quelques propriétés des cubiques planes et gauches; par M. MANGEOT.....	44
R 2b. — Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière relatif au centre des moyennes distances; par M. SCHLEGEL.....	49
O 3a. — Sur les normales des courbes; par M. BUCHE.....	51
P 1a. — Sur les involutions linéaires; par M. MAX GENTY.....	52

	Pages.
R 8e β . — Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat; par M. CARVALLO	55
A 4a. — Sur les groupes de Galois; par M. J. PEROTT.....	61
T 6, T 7. — Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques; par M. FÉLIX LUCAS.....	67
O 6m. — Sur une nouvelle classe de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales; par M. RAFFY.....	70
S 2a. — Transformation des équations générales du mouvement des fluides; par M. TOUCHE	73
D 6a. — Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. KOBBS	76
R 8c β . — Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes; par M. CHAILAN.....	81
P 2b γ . — Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution; par M. DEMOULIN.....	83
O 6a α . — Remarque sur la déformation des surfaces de révolution; par M. D'OCAGNE.....	85
X 4b. — Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs; par M. ARNOUX.....	87
N 2g α . — Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données; par M. DEMOULIN.....	92
A 4d. — Quelques remarques sur les équations du cinquième degré; par M. SÉLIVANOFF	97
K 9a. — Propriétés d'un système de points dans un plan; par M. FÉLIX LUCAS.....	109
I 7a. — Sur les racines primitives; par M. FROLOV.....	113
S 2a. — Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique; par M. TOUCHE.....	129
J 1a β . — Sur le nombre des séquences dans les permutations des n premiers nombres; par M. DESIRÉ ANDRÉ.....	131
P 1a. — Sur les systèmes collinéaires; par M. MAX GENTY.....	131
O 6k. — Sur des couples de surfaces applicables; par M. CARONNET.....	134
S 2b. — Sur les équations du clapotis; par M. GUYOU.....	140
P 1a. — Sur un théorème de Laguerre; par M. MAX GENTY.....	145
L ² 16f. — Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique; par M. MANGEOT.....	146
P 1a. — Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce; par M. MAX GENTY.....	148
R 6a β . — Un théorème général de Mécanique; par M. LAISANT.....	151

FIN DE LA TABLE DU TOME XXI.





QA
1
S59

Société mathématique de
France, Paris
Bulletin

t.20-21

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

Matt

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

